



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 7. Zagadnienia stateczności

11.2025

Utrata stateczności. Obciążenia krytyczne

- Stateczność stanu równowagi można najogólniej zdefiniować jako odporność na małe zaburzenia.
 1. *Jeśli po bardzo małym odchyleniu od stanu równowagi obciążona konstrukcja wraca do konfiguracji wyjściowej, to o układzie mówimy że jest stateczny (stabilny) - znajduje się w stanie równowagi trwałej.*
 2. *Jeżeli nawet najmniejsze zaburzenie powoduje ruch układu i gwałtowną zmianę konfiguracji mówimy że układ jest niestabilny.*
- O tym czy w stanie równowagi układ odkształcalny jest stabilny czy nie, decyduje zazwyczaj wielkość obciążenia. *Obciążenie, przy którym konstrukcja może przejść ze stanu stabilnego do niestabilnego, nazywane jest obciążeniem krytycznym, a stan układu przy takim obciążeniu nazywamy stanem równowagi obojętnej lub równowagi krytycznej.*
- Analiza stateczności poprzez obliczenia uwzględniające w pełni zmiany konfiguracji układu zachodzące ze wzrostem obciążenia jest trudna, pracochłonna i może być przeprowadzona, zwykle numerycznie, tylko dla mniej złożonych przypadków. *Z tego powodu w praktyce często przyjmuje się pewne założenia upraszczające i badanie stateczności sprowadzone jest do zagadnienia na wartości własne, z którego można wyznaczyć obciążenia krytyczne.*

Kryterium energetyczne badania stateczności

- Stateczność konstrukcji sprężystej możemy badać oceniając zmiany całkowitej energii potencjalnej ΔV wywołane przez bardzo małe odchylenie od stanu równowagi.
 - Jeśli $\Delta V > 0$, to odchylenie od stanu równowagi wymaga dostarczenia energii, a więc istnienia dodatkowych oddziaływań zewnętrznych (*analizowany stan jest stanem równowagi trwałej*).
 - Jeśli $\Delta V < 0$, to dowolnie małe odchylenie od stanu równowagi wywołuje oddawanie energii, co w rzeczywistości przejawia się w ruchu układu i przejściu w położenie różne od pierwotnego (*stan równowagi nietrwałej*).
 - Jeśli $\Delta V = 0$, to układ może pozostać w położeniu pierwotnym lub przejść do nowego położenia równowagi (*układ pozostaje w stanie równowagi obojętnej - krytycznej*).

Całkowity przyrost energii potencjalnej układu odkształcalnego

wywołany **małą zmianą (wariacją)** pola przemieszczeń można przedstawić jako:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots$$

pierwsza
wariacja V

druga
wariacja V

trzecia
wariacja V

(Podobne do rozwinięcia w szereg Taylora)

$$\Delta f = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2!} f''(x)dx^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)dx^3 + \dots$$

- Warunek $\delta V = 0$ jest warunkiem koniecznym równowagi!

Aby jednak ocenić rodzaj badanego stanu równowagi, należy zbadać znak ΔV .

- Podstawowe kryterium energetyczne badania stateczności, tzw. kryterium Lagrange'a-Dirichleta, ogranicza się do badania drugiej wariacji:

(Energetyczna metoda badania stateczności) ➡

przy $\delta^2 V > 0$ – równowaga trwała,
 przy $\delta^2 V < 0$ – równowaga nietrwała,
 przy $\delta^2 V = 0$ – stan równowagi krytycznej (obojętnej).

- W metodzie elementów skończonych całkowita energia potencjalna układu staje się po dyskretyzacji funkcją przemieszczeń węzłowych $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$.
- Przyrost energii ΔV odpowiadający zaburzeniu $d\{q\} = [dq_1, dq_2, \dots, dq_n]$ możemy przedstawić w postaci:

$$\Delta V = \sum_i^n \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} dq_i dq_j$$

Zgodnie z kryterium Lagrange'a-Dirichleta ograniczymy się do uwzględnienia pierwszych i drugich pochodnych V . Zapisując w postaci macierzowej:

$$\Delta V = \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right]}_{\text{wektor}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}_{\text{wektor}} + \frac{1}{2} [dq_1, \dots, dq_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix}}_{\text{macierz}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}_{\text{wektor}}$$

Zerowanie się pierwszego członu równania jest więc warunkiem koniecznym równowagi ustroju, a z równowagą krytyczną mamy do czynienia, gdy dodatkowo drugi człon równania jest równy zero.

$$\Delta V = \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right] \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}_{\text{Zerowanie się pierwszego członu równania}} + \frac{1}{2} [dq_1, \dots, dq_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_i} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}}_{\text{koniecznym równowagi ustroju, a z równowagą krytyczną mamy do czynienia, gdy dodatkowo drugi człon równania jest równy zero.}}$$

Zerowanie się pierwszego członu równania jest więc warunkiem koniecznym równowagi ustroju, a z równowagą krytyczną mamy do czynienia, gdy dodatkowo drugi człon równania jest równy zero.

W efekcie warunkiem równowagi krytycznej jest układ równań

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right] \{dq\} = \{0\}$$

- Przyjmujemy zwykle, że mamy do czynienia z obciążeniem jednoparametrowym, które jest określone przez założony rozkład sił zewnętrznych i nieustalony skalarny mnożnik λ_* .

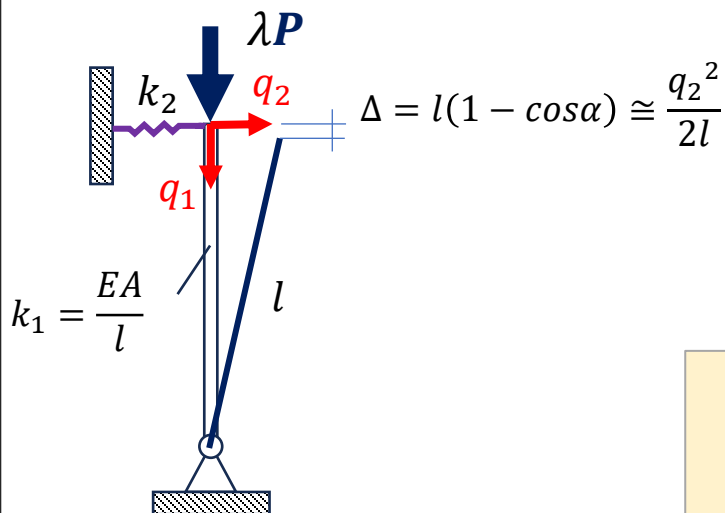
Wówczas energia potencjalna V uzależniona jest od wartości parametru λ_ .*

Rozwiązanie sprowadza się do warunku:

$$\det \left[\frac{\partial^2 V(\lambda_*)}{\partial q_i \partial q_j} \right] = \{0\}$$

- Podobnie jak w analizie drgań własnych, każdej wartości λ_* odpowiada wektor $\{dq\}_i$, który opisuje kształt deformacji przy utracie stateczności.

Przykład 1 Pręt nieskończenie sztywny na zginanie i sprężysty przy ściskaniu + sprężynka



Energię potencjalną tego pręta możemy wyrazić wzorem:

$$V = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 q_2^2 - \lambda_* P q_1 - \lambda_* P \frac{q_2^2}{2l}$$

Badamy przyrost ΔV odpowiadający zmianie całkowitej energii potencjalnej przy zaburzeniu $\{dq\}$:

$$\Delta V = \left[\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right] \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [dq_1, \dots, dq_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial q_i} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_n \end{Bmatrix}$$

$$\Delta V = \underbrace{\left[k_1 q_1 - \lambda_* P, k_2 q_2 - \lambda_* \frac{P}{l} q_2 \right]}_{\substack{= 0 \\ \text{w stanie} \\ \text{równowagi}}} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [dq_1, dq_2] \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda_* \frac{P}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_* P / k_1 \\ q_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda_* \frac{P}{l} \end{bmatrix} = 0$$

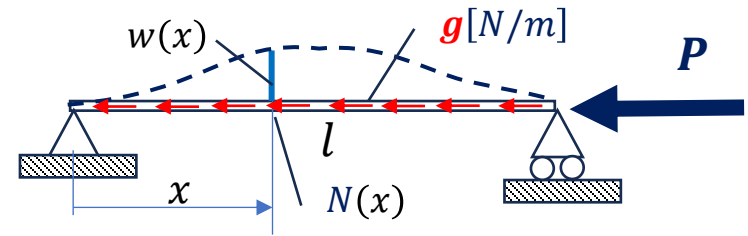
$$\lambda_* P = k_2 l$$

Dla takiej wartości obciążenia ustrój przechodzi w stan krytyczny

Analiza MES wyboczenia prętów ściskanych

Ściskany pręt znajduje się w **stanie równowagi**:

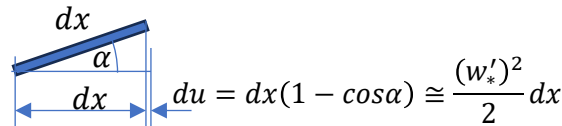
$$\Delta V = \underbrace{\delta V}_{=0} + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots$$



W celu określenia warunków stanu krytycznego należy zbadać **nieliniową część przyrostu ΔV** , która wiąże się w przypadku ściskania prętów z zaburzeniem osiowości (zginaniem).

Niech w_* - bardzo małe zaburzenie ugięcie pręta *(W celu uproszczenia zapisu często przyjmuje się oznaczenie q_i zamiast dq_i)*

Wskutek ugięcia przekroje każdego elementu pręta o długości dx zbliżą się mierząc wzdłuż osi pręta o odległość du .



Praca obciążeń zewnętrznych na przemieszczeniach będących efektem zaburzenia:
$$\Delta W_z = \int_0^l \underbrace{\lambda N_*(x)}_{\text{siła normalna w przekroju}} \frac{(w'_*)^2}{2} dx$$

Przyrost energii potencjalnej odkształcenia wiąże się z deformacją zgięciową:
$$\Delta U = \int_0^l EI \frac{(w''_*)^2}{2} dx$$

Przyrost całkowitej energii potencjalnej wywołane zaburzeniem w_* jest równy:

$$\Delta V = \Delta U - \Delta W_z = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w''_*)^2 dx - \frac{\lambda_*}{2} \int_0^l N_*(x) (w'_*)^2 dx$$

W każdym elemencie skończonym ugięcie w_* możemy przedstawić za pomocą funkcji kształtu dla elementu belki.

$$w_*(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$$

$$w'_*(\xi) = [N'_1(\xi), N'_2(\xi), N'_3(\xi), N'_4(\xi)] \{q\}_e$$

$$w''_*(\xi) = [N''_1(\xi), N''_2(\xi), N''_3(\xi), N''_4(\xi)] \{q\}_e$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_2(\xi) &= \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}, \\ N_3(\xi) &= 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_4(\xi) &= \frac{-\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}. \end{aligned}$$

Zmianę całkowitej energii potencjalnej ΔV_e w elemencie skończonym o długości l_e można więc przedstawić jako:

$$\Delta V_e = \frac{EI}{2} [q]_e \int_0^{l_e} \{N''\} [N''] d\xi \{q\}_e - \frac{\lambda_*}{2} [q]_e \int_0^{l_e} N_*(x) \{N'\} [N'] d\xi \{q\}_e$$

Otrzymamy stąd

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e - \frac{\lambda_*}{2} [q]_e [k_\sigma]_e \{q\}_e$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} [q]_e ([k]_e - \lambda_* [k_\sigma]_e) \{q\}_e$$

Macierz sztywności elementu belkowego:

$$[k]_e = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

Jeśli siła normalna w przekroju jest stała i ma wartość jednostkową $N_*(\xi) = 1$, możemy wyliczyć:

Macierz sztywności geometrycznej elementu belkowego:

$$[k_\sigma]_e = \frac{1}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

Jeśli siła w elemencie skończonym zmienia się liniowo od zera do wartości jednostkowej: $N_*(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e}$:

Macierz sztywności geometrycznej elementu belkowego:

$$[k_\sigma]_e = \frac{1}{60l_e} \begin{bmatrix} 30 & 0 & -36 & 6l_e \\ 0 & 6l_e^2 & 0 & -l_e^2 \\ -36 & 0 & 36 & -6l_e \\ 6l_e & -l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

W modelu MES składającym się z wielu elementów skończonych obliczamy zmianę energii ΔV całego układu, która jest sumą przyrostów energii ΔV_e wszystkich elementów przy małym zaburzeniu stanu równowagi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} [q]([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\}$$

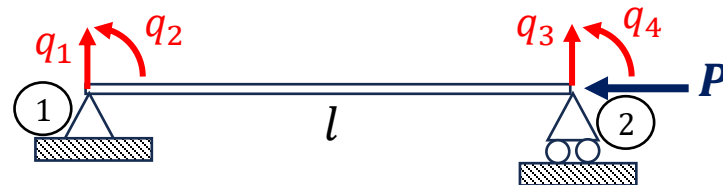
Macierz zależy od sił wewnętrznych, które powinny być wcześniej obliczone dla liniowego zadania statyki z podanym obciążeniem.

Otrzymujemy ostatecznie uogólnione zadanie na wartości własne:

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

- Wartości własne określają mnożnik skalarny λ_* , który mówi, ile razy większe powinno być obciążenie od wstępnie założonego żeby konstrukcja znalazła się w stanie równowagi krytycznej.
- Odpowiednie wektory własne $\{q\}_i$ definiują kształt deformacji dla kolejnych obciążeń krytycznych.
- Podobnie jak w analizie drgań własnych, wektory własne wyznaczane są z dokładnością do stałego mnożnika i nie dają informacji o skali deformacji.

Przykład 2 Obliczyć za pomocą najprostszego modelu MES siłę krytyczną dla pręta obciążonego jedynie stałą siłą ściskającą



Rozwiązanie:

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

$$\left(\frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 2l^2 & -3l & l^2 & -l^2 \\ 6 & -3l & 2l^2 & -l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_*}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 4l^2 & -3l & -l^2 & l^2 \\ 36 & -3l & 4l^2 & -l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\left(\begin{bmatrix} 2l^2 & l^2 \\ l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_* l^2}{60EI} \begin{bmatrix} 4l^2 & -l^2 \\ -l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiamy:

$$\lambda = \frac{\lambda_* l^2}{60EI}$$



$$\begin{bmatrix} 2 - 4\lambda & 1 + \lambda \\ 1 + \lambda & 2 - 4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

$$(2 - 4\lambda)^2 - (1 + \lambda)^2 = 15\lambda^2 - 18\lambda + 3 = 0$$

pierwiastki: $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{5} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^* = \frac{12EI}{l^2} \\ \lambda_2^* = \frac{60EI}{l^2} \end{cases} \xrightarrow{q_4 = \alpha_*}$

Rozwiązanie ściste:

$$P_i^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/i)^2}$$

$$P_1^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9.8696 \cdot EI}{l^2}$$

$$P_2^{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} = \frac{39.4784 \cdot EI}{l^2}$$

1 r-nie: $(2 - 4 \cdot \frac{1}{5}) q_2 + (1 + \frac{1}{5}) q_4 = 0 \rightarrow 1.2 q_2 + 1.2 q_4 = 0$

$$[q]_1 = [0, -\alpha_*, 0, \alpha_*]$$

$$q_2 = -\alpha_*$$

$$q_4 = \alpha_*$$

1 r-nie: $(2 - 4 \cdot 1) q_2 + (1 + 1) q_4 = 0 \rightarrow -2 q_2 + 2 q_4 = 0$

$$[q]_2 = [0, \alpha_*, 0, \alpha_*]$$

$$q_2 = \alpha_*$$

$$q_4 = \alpha_*$$

Przykład 3 Obliczyć za pomocą najprostszego modelu MES siłę krytyczną dla pręta utwierdzonego i obciążonego wydatkiem sił p_0

Rozwiązanie:

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\left(\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_*}{60l} \begin{bmatrix} 36 & -6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiamy:

$$\lambda = \frac{\lambda_* l^2}{120EI}$$



$$\begin{bmatrix} 6 - 36\lambda & -3l + 6l\lambda \\ -3l + 6l\lambda & 2l^2 - 2l^2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

$$36\lambda^2 - 48\lambda + 3 = 0$$

pierwiastki:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,06574 \\ \lambda_2 = 1,268 \end{cases}$$



$$\lambda_* = \frac{\lambda \cdot 120EI}{l^2}$$



$$\lambda_1^* = 7.89 \frac{EI}{l^2}$$

$$\lambda_2^* = 152 \frac{EI}{l^2}$$



Obciążenie krytyczne:

$$p_{0*} = \lambda_1^* \frac{1}{l} = 7.89 \frac{EI}{l^3}$$

Rozwiązanie analityczne:

$$7.837 \frac{EI}{l^3}$$

$$q_4 = \alpha_*$$



$$[q]_1 = [0, 0, 0.71733 \cdot l\alpha_*, \alpha_*]$$

$$[q]_2 = [0, 0, 0.1162 \cdot l\alpha_*, \alpha_*]$$



$$q_4 = \alpha_*$$

$$q_3 = 0.71733 \cdot l\alpha_*$$

$$q_4 = \alpha_*$$

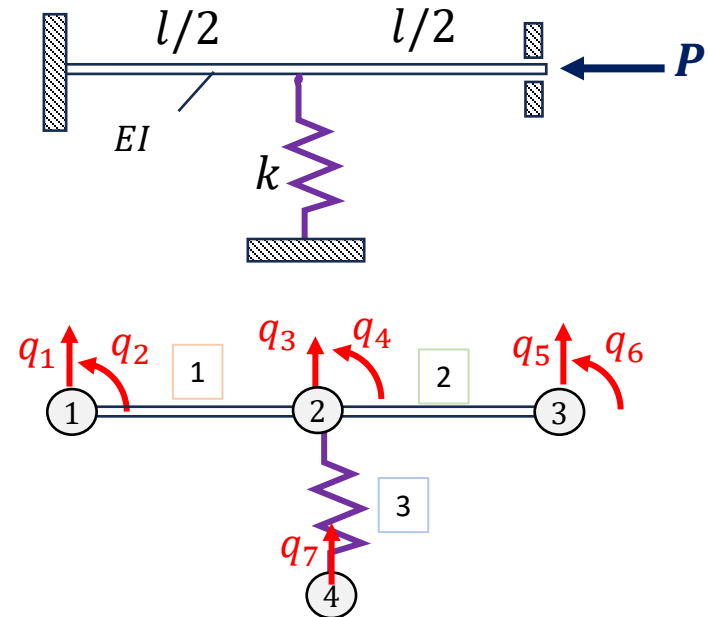
$$q_3 = 0.1162 \cdot l\alpha_*$$

Przykład 4 Wyznaczyć siłę krytyczną i odpowiednią postać utraty stateczności dla ustroju przedstawionego na rysunku.

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

$$[k]_1 = [k]_2 = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3 = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} \frac{kl_e^3}{2EI} & -\frac{kl_e^3}{2EI} \\ -\frac{kl_e^3}{2EI} & \frac{kl_e^3}{2EI} \end{bmatrix}$$



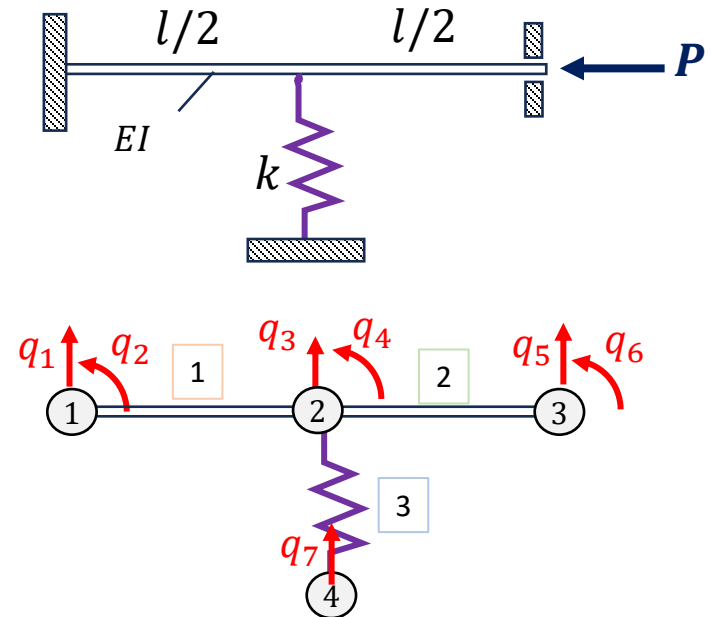
Macierz globalna sztywności:

$$[K] = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3l_e & 6 + 6 + \frac{kl_e^3}{2EI} & 3l_e - 3l_e & -6 & 3l_e & 0 & -\frac{kl_e^3}{2EI} \\ 3l_e & l_e^2 & 3l_e - 3l_e & 2l_e^2 + 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 & 0 & -\frac{kl_e^3}{2EI} \\ 0 & 0 & -6 & -3l_e & 6 & -3l_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kl_e^3}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kl_e^3}{2EI} & -\frac{kl_e^3}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{kl_e^3}{2EI} \end{bmatrix}$$

symetryczna

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

$$[k_\sigma]_1 = [k_\sigma]_2 = \frac{1}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$



Macierz globalna sztywności geometrycznej:

$$[K_\sigma] = \frac{1}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ & & 36+36 & 3l_e-3l_e & -36 & 3l_e \\ & & & 4l_e^2 + 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ & & & & 36 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

symetryczna

Po uwzględnieniu warunków brzegowych: $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q_7 = 0$

$$\left(\frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{kl_e^3}{2EI} & 0 \\ 0 & 4l_e^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_*}{30l_e} \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 8l_e^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiamy:

$$\lambda = \frac{l_e^2}{60EI} \cdot \lambda_*$$

$$\beta = \frac{kl_e^3}{2EI}$$



$$\begin{bmatrix} 12 + \beta - 72\lambda & 0 \\ 0 & 4l_e^2(1 - 2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

$$(12 + \beta - 72\lambda)(1 - 2\lambda) = 0$$

pierwiastki:

$$\lambda_1 = \frac{12 + \beta}{72}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Jeśli $\beta < 24 \rightarrow k < \frac{48EI}{l_e^3} \rightarrow \lambda_1 < \lambda_2$ (słaba sprężyna)

i wtedy utrata stateczności zajdzie w postaci 1:

$$\lambda_1^* = \frac{60EI}{l_e^2} \lambda_1 = \left(40 + \frac{20}{6} \beta \right) \frac{EI}{l_e^2}$$

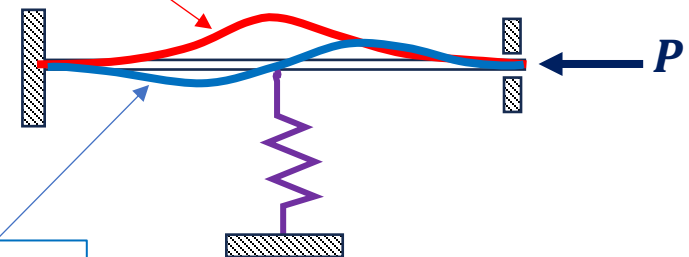
$$[q]_1 = [0, 0, q_3, 0, 0, 0, 0]$$

Jeśli $\beta > 24 \rightarrow k > \frac{48EI}{l_e^3} \rightarrow \lambda_2 < \lambda_1$ (silna sprężyna)

i wtedy utrata stateczności zajdzie w postaci 2:

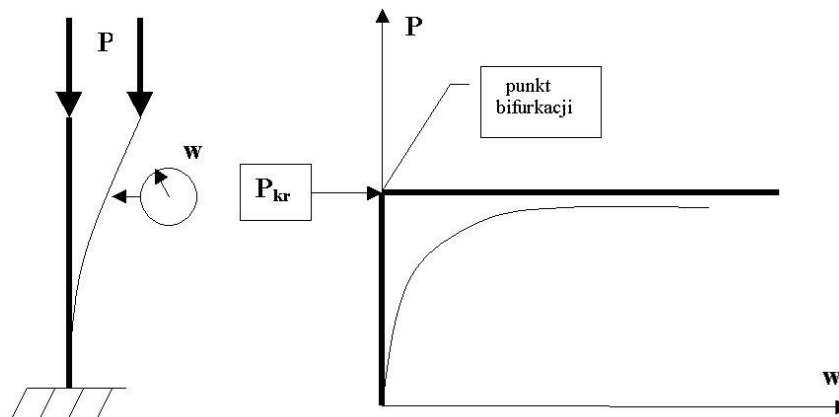
$$\lambda_2^* = \frac{60EI}{l_e^2} \lambda_2 = \frac{30EI}{l_e^2}$$

$$[q]_2 = [0, 0, 0, q_4, 0, 0, 0]$$



BADANIE STATECZNOŚCI ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH. WYBOCZENIE PŁYT CIENKOŚCIENNYCH

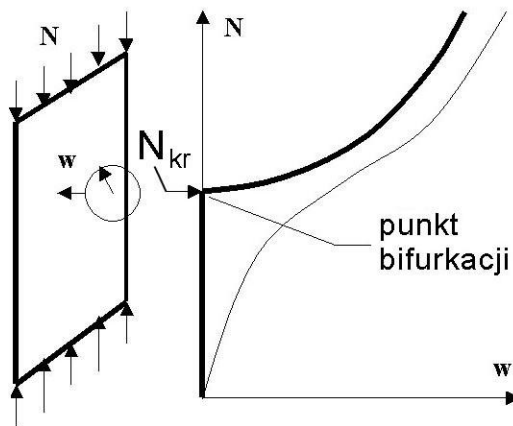
- W rzeczywistych konstrukcjach (gdzie jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu do pozostałych), przy pewnych krytycznych wartościach obciążeń, występuje zjawisko zmiany postaci równowagi ustroju, wywołane nawet niewielkimi zaburzeniami.
- Przejście z jednej postaci równowagi do drugiej związane jest z reguły z bardzo dużym wzrostem deformacji i naprężeń, prowadzącym w wielu przypadkach do zniszczenia ustroju.
- Badanie stateczności polega na sprawdzeniu, czy konstrukcja jest odporna na zmianę postaci równowagi pod wpływem zaburzeń.
- Celem jest wyznaczenie takiej wartości obciążenia, przy którym konstrukcja traci stateczność, tzn. dowolnie małe zaburzenie prowadzi do zmiany postaci równowagi.
- Przykładowo dla smukłej, prostej belki ściskanej model zjawiska zakłada dwie postacie równowagi występujące równocześnie przy obciążeniu siłą krytyczną P_{kr} w punkcie bifurkacji.



Postać pierwotna dotyczy stanu przed utratą stateczności, w którym oś belki pozostaje prosta, druga postać dotyczy stanu po utracie stateczności, w którym oś belki jest wygięta.

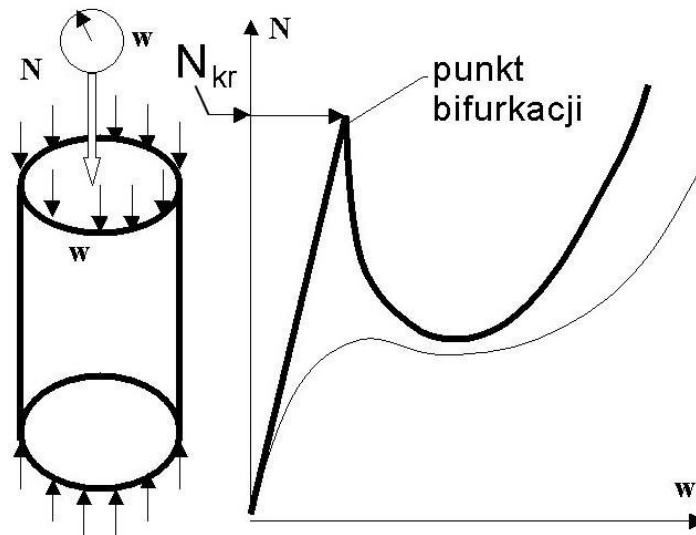
W rzeczywistości przy obciążeniu krytycznym belka ulega zwykle zniszczeniu.

- Punkt bifurkacji jest cechą równań w modelu matematycznym opisującym utratę stateczności i często niedokładnie oddaje fizykę zjawiska.
- W przypadku płyty, po utracie stateczności ustrój może jeszcze przenosić obciążenia pozostając w równowadze i w stanie sprężystym, a przejście z jednej postaci równowagi w drugą jest łagodne.



- Przekroczenie obciążenia krytycznego w przypadku płyt zwykle nie prowadzi do ich zniszczenia (zależy to między innymi od sposobu podparcia krawędzi). *Płyta zaczyna się falować oraz znacznie spada jej sztywność w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej.*
- Często takie zachowanie się płyty uważa się za niedopuszczalne i obciążenie krytyczne przyjmuje się za obciążenie niszczące. *Dokładne zachowanie się płyty ściskanej lub ścinanej przy obciążeniu przekraczającym obciążenie krytyczne możemy otrzymać rozwiązując nieliniowe równanie równowagi. Jest to zadanie dość trudne, szczególnie przy złożonych obciążeniach i warunkach brzegowych.*
- Znajomość postaci wyboczenia pozwala konstruktorowi zaprojektować odpowiednie wzmocnienia zwykle w postaci usztywniających żeber, które podwyższają wartość obciążenia krytycznego. W typowych cienkościennych konstrukcjach lotniczych wzmocnienia w postaci żeber i podłużnic stanowią szkielet podpierający cienkie pokrycie. *Innym często stosowanym sposobem podwyższenia obciążenia krytycznego jest tworzenie płyt przekładkowych o dużej zastępczej sztywności płytowej.*

- Cienkościenne powłoki tracą stateczność ulegając pofalowaniu w obszarach ściskanych i ścinanych.
- Określenie obciążeń krytycznych dla powłok jest znacznie trudniejsze niż dla płyt ze względu na bardziej złożone równania, w których uwzględnione są jej krzywizny, a krytyczna wartość obciążenia odpowiadająca punktowi bifurkacji może być zawyżona kilkakrotnie.



- Często w przypadku powłok nie można mówić o naprężeniach krytycznych, jako o wartości, przy której następuje łagodne przejście z jednej postaci równowagi w drugą, gdyż przejście może mieć charakter przeskoku. *Rzeczywiste powłoki są często bardzo dalekie od ideału. Istnienie wstępnych niedokładności obniża znacznie wartość obciążenia krytycznego oraz ułatwia proces przeskoku. Z tego powodu licząc się z realnym wykonaniem powłok jak również z faktem, że bardziej grubościennie powłoki można wykonać dokładniej niż cienkościennie podwyższamy odpowiednio współczynnik bezpieczeństwa podczas projektowania.*
- Istnieje wiele poradników inżynierskich, w których na podstawie wieloletnich analiz i badań doświadczalnych podano szereg wzorów określających bezpieczne ze względu na wyboczenie obciążenie dla różnych powłok. *Niezbędna jest jednak przeważnie znajomość obciążenia krytycznego, którego sposób określenia zostanie tutaj przedstawiony.*

- Dokładne zachowanie się powłoki ściskanej lub skręcanej przy obciążeniu zbliżonym lub większym od obciążenia krytycznego z uwzględnieniem rzeczywistych kształtów geometrycznych można otrzymać rozwiązując nieliniowe równania równowagi. *Jest to zadanie trudne szczególnie przy złożonych kształtach geometrycznych, warunkach brzegowych i obciążeniach.*
- Obecnie takie przypadki analizowane są głównie za pomocą MES. *W metodzie elementów skończonych najprostsze obliczenia stateczności konstrukcji polegają na znalezieniu postaci utraty stateczności i wartości obciążeń odpowiadających przejściu z jednej postaci równowagi w drugą w punkcie bifurkacji.*
- **Największe znaczenie ma pierwsza postać utraty stateczności.**

Linearyzacja nieliniowych równań wokół początkowego położenia równowagi (belek, płyt, powłok) prowadzi do układu równań w postaci zagadnienia na wartości własne:

$$([K] - \lambda_* [K_\sigma])\{q\} = 0$$

Określenie obciążenia krytycznego oraz postaci wyboczenia następuje w dwóch krokach:

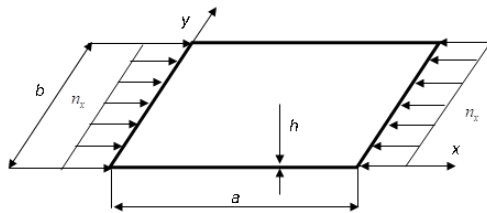
- 1) Rozwiązanie statyczne dla określonego obciążenia ($[K]\{q\} = \{P\}$), po którym następuje obliczenie macierzy $[K_\sigma]$,
- 2) Rozwiązanie zagadnienia na wartości własne czyli obliczenie λ_* i $\{q\}$,

gdzie: λ_* jest współczynnikiem mówiącym, ile razy należy zwiększyć obciążenie statyczne $\{P\}$, dla którego określana była macierz $[K_\sigma]$, aby stało się ono obciążeniem krytycznym,

$\{q\}$ – wektorem opisującym postać utraty stateczności.

Przykład 5a Płyta ściskana podparta przegubowo na brzegach

Płyta o wymiarach $a = 885\text{mm}$, $b = 302\text{mm}$, $h = 2,5\text{mm}$, wykonana z duraluminium ($E = 70000\text{ MPa}$, $\nu = 0.33$) została obciążona wydatkiem ściskającym na brzegu i swobodnie podparta na czterech krawędziach ($u_z = 0$).

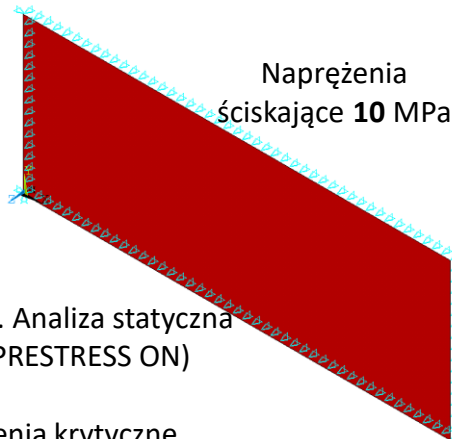
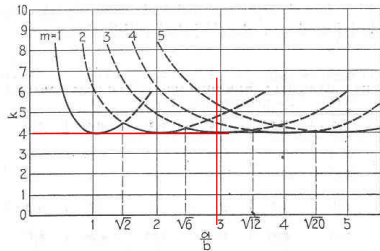


$$\sigma_{kr} = k \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{b^2}$$

(rozwiązanie ścisłe)

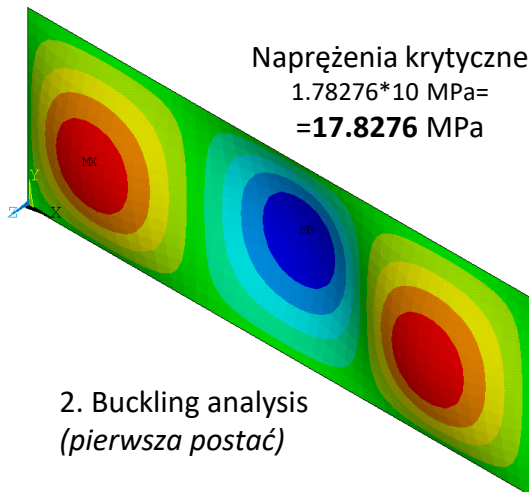
$k = 4$

$$\sigma_{kr} = 17.7\text{ MPa}$$



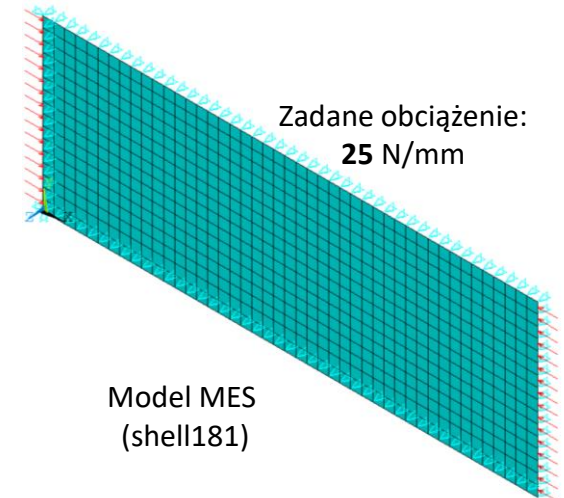
Naprężenia
ściskające 10 MPa

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)



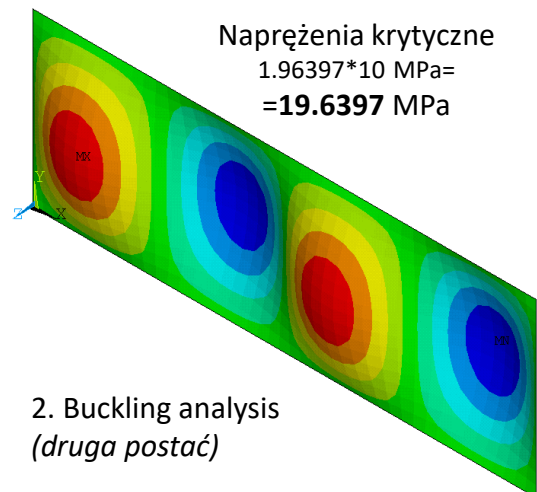
Naprężenia krytyczne
 $1.78276 \cdot 10\text{ MPa} =$
 $= 17.8276\text{ MPa}$

Build 19.2
Nov 15 2020
13:29:32
PLOT NO.
NODAL SOLU
STEP=1
SUB =1
TIME=1
RSYS=0
PowerGraph
EFACET=1
DMX =.072755
SMN =-.072695
SMX =.072755



Zadane obciążenie:
25 N/mm

Model MES
(shell181)



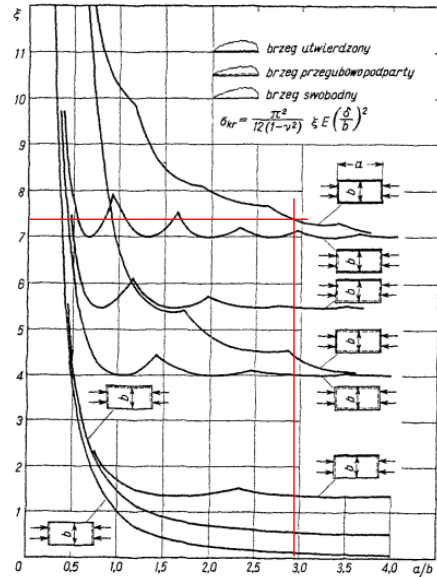
Naprężenia krytyczne
 $1.96397 \cdot 10\text{ MPa} =$
 $= 19.6397\text{ MPa}$

Build 19.2
Nov 15 2020
13:29:32
PLOT NO.
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =2
TIME=1
RSYS=0
PowerGraph
EFACET=1
DMX =.054886
SMN =-.054886
SMX =.054886

2. Buckling analysis
(druga postać)

Przykład 5b Płyta ściskana utwardzona na brzegach

Płyta o wymiarach $a = 885\text{mm}$, $b = 302\text{mm}$, $h = 2,5\text{mm}$, wykonana z duraluminium ($E = 70000\text{ MPa}$, $\nu = 0.33$) została obciążona wydatkiem ściskającym na brzegu i utwardzona na brzegach.

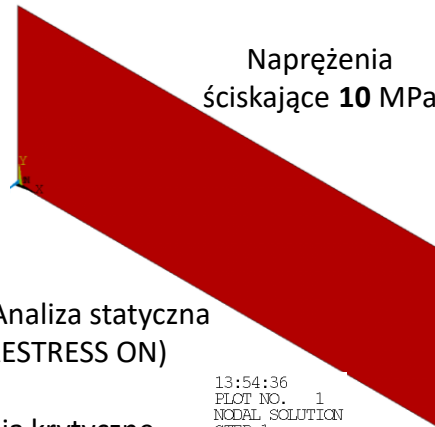


$$\sigma_{kr} = \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{b^2}$$

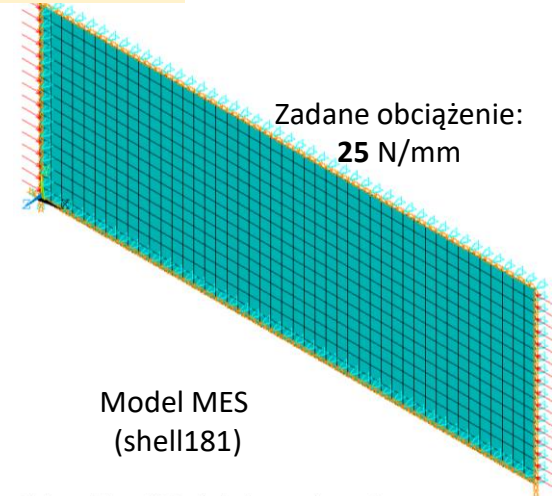
(rozwiązanie ścisłe)

$$\xi = 7.35$$

$$\sigma_{kr} = 32.5\text{ MPa}$$

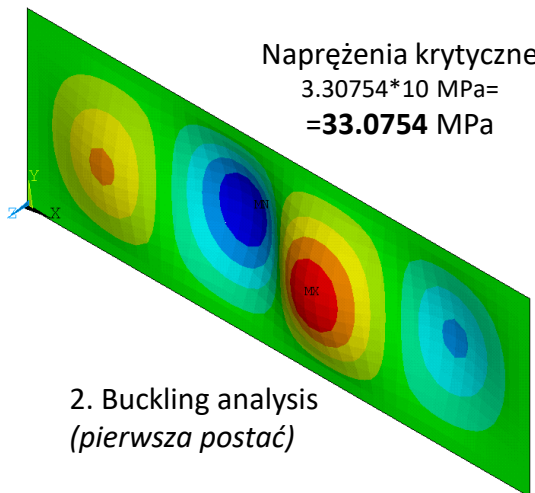


1. Analiza statyczna (PRESTRESS ON)



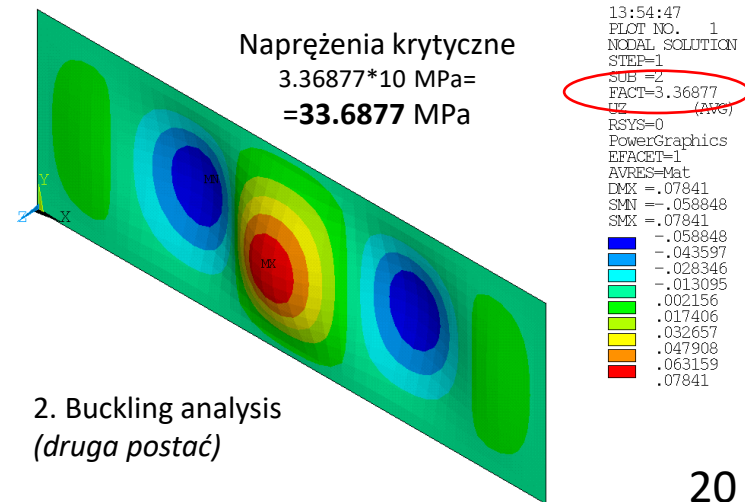
Build 19.2
NOV 15 2022
13:53:46
PLOT NO.
ELEMENTS
PowerGraph
EFACET=1
ROT
PRES-NORM
25

Build 19.2
NOV 15 2024
13:53:58
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=2
SUB=1
TIME=2
SX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX = .127208
SMN = -10
SMX = -10



2. Buckling analysis (pierwsza postać)

13:54:36
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB=1
FACT=3.30754
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX = .070489
SMN = -.070489
SMX = .070489
UZ
-.070489
-.054825
-.03916
-.023496
-.007832
.007832
.023496
.03916
.054825
.070489



2. Buckling analysis (druga postać)

13:54:47
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB=2
FACT=3.36877
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX = .07841
SMN = -.058848
SMX = .07841
UZ
-.058848
-.043597
-.028346
-.013095
.002156
.017406
.032657
.047908
.063159
.07841

Przykład 6 Płyta ścinana

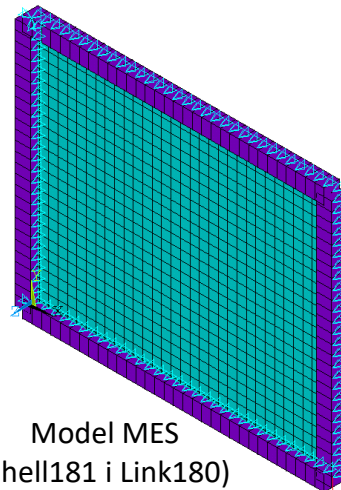
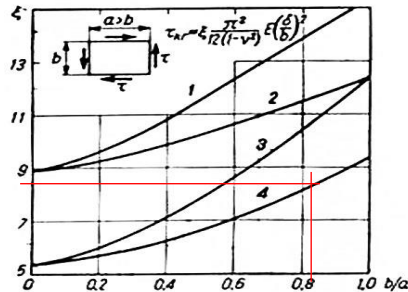
Płyta o wymiarach $a=630\text{mm}$, $b=520\text{mm}$, $h=2\text{mm}$, została wykonana z kompozytu o zastępczych własnościach mechanicznych równych: moduł Younga $E=45926\text{ MPa}$, liczba Poissona $\nu=0.33$. W celu wprowadzenia stałych naprężeń stycznych płyta została umieszczona w czworoboku przegubowym wykonanym z prętów stalowych o przekroju $A_p=1000\text{ mm}^2$ ($E_p=2 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $\nu_p=0,33$) obciążonym siłą pionową w narożu. Płyta z prętami ma tylko wspólne przemieszczenia – połączona jest przegubowo.

$$\tau_{kr} = \xi \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{b^2}$$

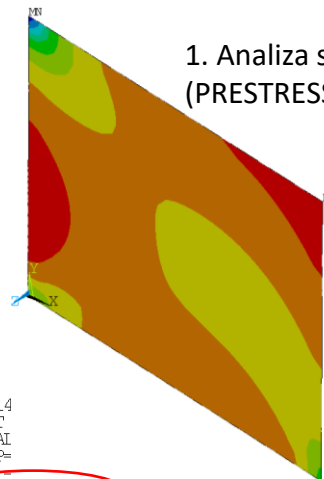
(rozwiązanie ściśle)

$$\tau_{kr} = 8.25 \frac{\pi^2}{12(1-0.33^2)} \frac{45926 \cdot 2^2}{520^2} = 5.18\text{ MPa}$$

$$F_{kr} = 5.18\text{ MPa} \cdot 520\text{ mm} \cdot 2\text{ mm} = 5387\text{ N}$$



Model MES
(shell181 i Link180)



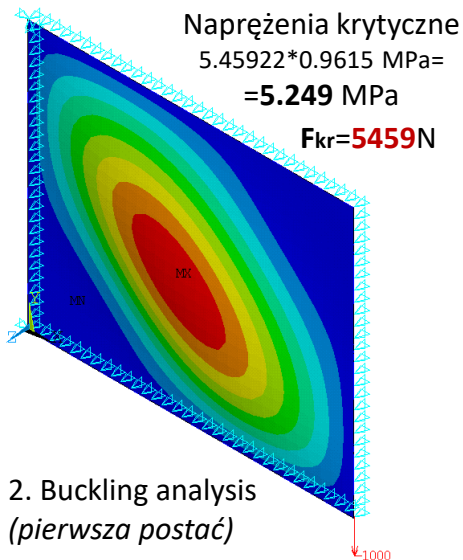
1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

```

NOV 15 2024
15:13:04
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SKY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.039812
SMN =-.878899
SMX =-.878899

```

Średnie naprężenia tnące:
1000N/520mm/2mm=
=0.9615 MPa

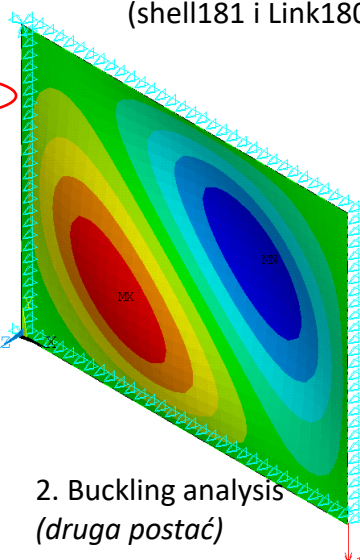


Naprężenia krytyczne
5.45922*0.9615 MPa=
=5.249 MPa
Fkr=5459N

```

15:14:37
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
FACT=5.45922
Uz (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.49334
SMN =-.014348
SMX =.49334

```



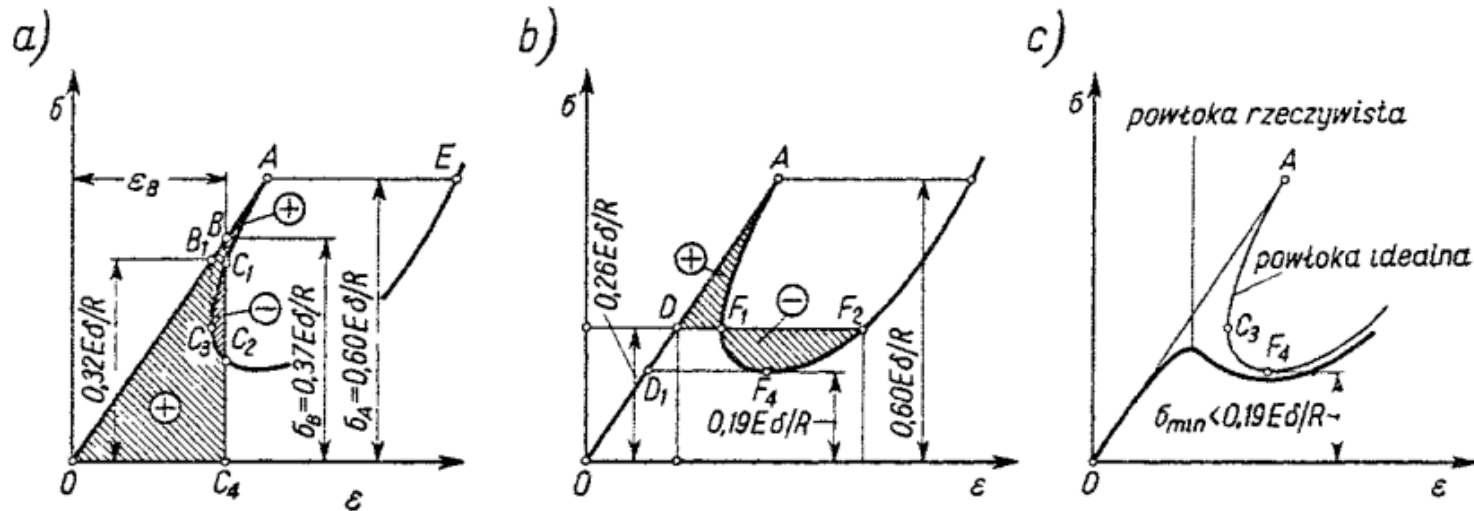
2. Buckling analysis
(druga postać)

```

15:14
PLOT
NODAL
STEP=1
SUB =1
FACT=6.50157
Uz (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.287132
SMN =-.276329
SMX =.287132

```

Przykład 7a Powłoka walcowa: $R=100\text{mm}$, $H=300\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $E=7e4\text{ MPa}$, $\nu=0.33$



Rys. 11.28. Warianty przeskoku ściskanej powłoki cylindrycznej

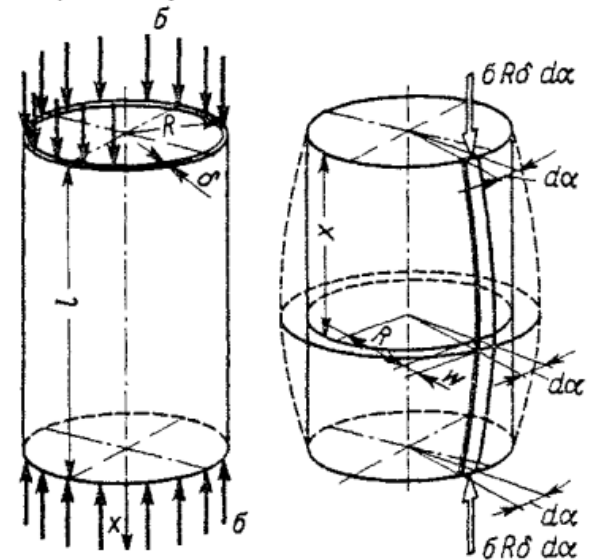
a) przeskok na maszynie sztywnej; b) przeskok na maszynie obciążnikowej.

$$\sigma_{kr}^A \approx 0.6E \frac{h}{R} = 0.6 \cdot 7e4 \frac{0.5}{100} = 210\text{MPa}$$

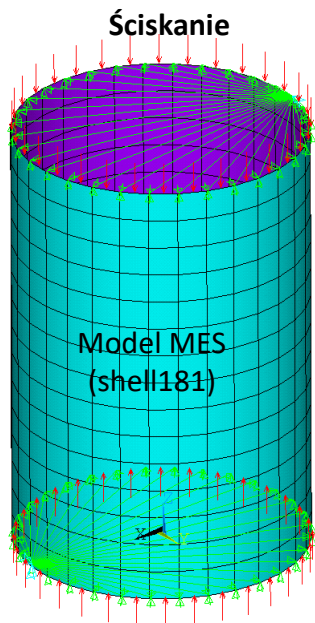
$$\sigma_{kr}^B \approx 0.37E \frac{h}{R} = 129.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{kr}^D \approx 0.26E \frac{h}{R} = 91\text{MPa}$$

$$\sigma_{kr}^{D1} \approx 0.19E \frac{h}{R} = 66.5\text{MPa}$$



Przykład 7b Powłoka walcowa: R=100mm, H=300mm, h=0.5mm, E=7e4 MPa, ν=0.33

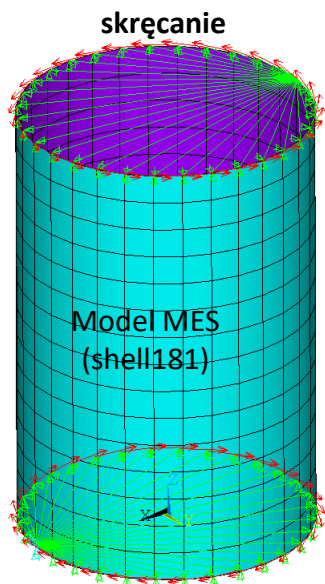
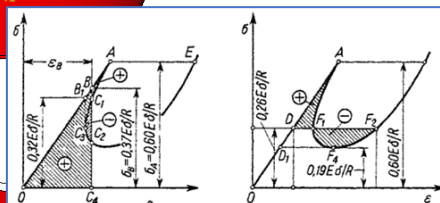


walec sciskany 20MPa



1. Analiza statyczna (PRESTRESS ON)

```
Build 19.2
NOV 15 2024
20:19:10
PLOT NO.
NODAL SOLUT:
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SZ (AV)
RSYS=1
PowerGraphic
EFACET=1
AVRES=Mat
DMK =.08623
SMN =-20
SMK =-20
```

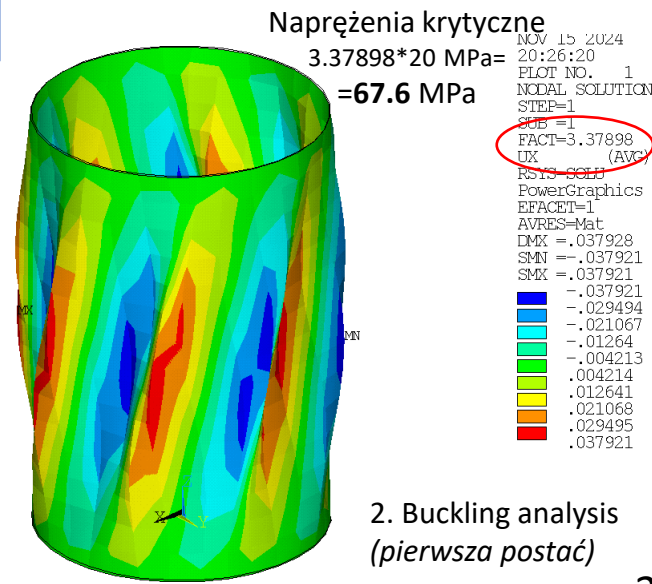
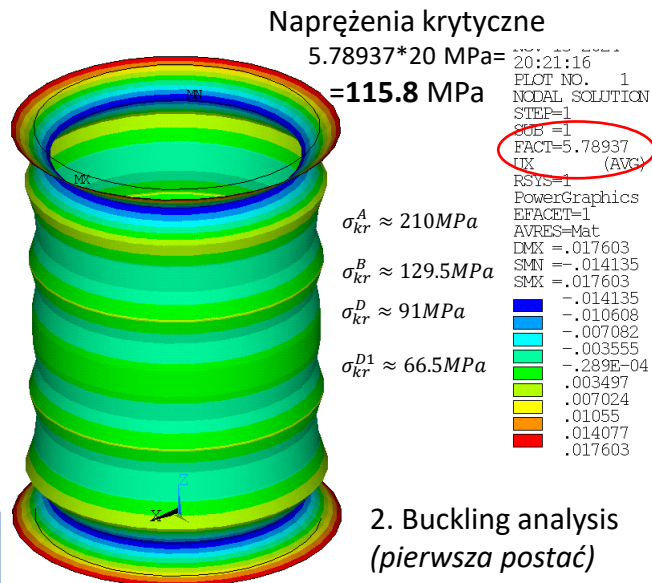


walec scinany skretnie 20MPa

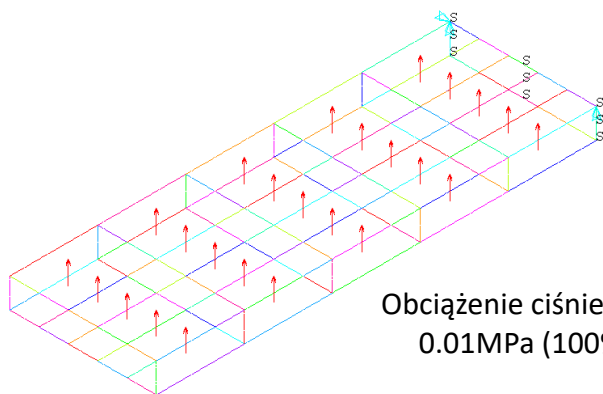


1. Analiza statyczna (PRESTRESS ON)

```
NODAL SOLUT:
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SKY (AV)
MIDDLE
RSYS=SOLU
PowerGraphic
EFACET=1
AVRES=Mat
DMK =.236497
SMN =20.1208
SMK =20.1208
```



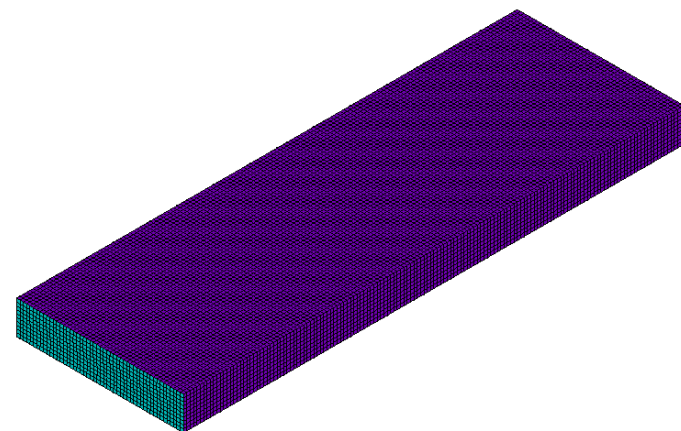
Przykład 8a Keson zginany **bez pasów**: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, ν=0.33



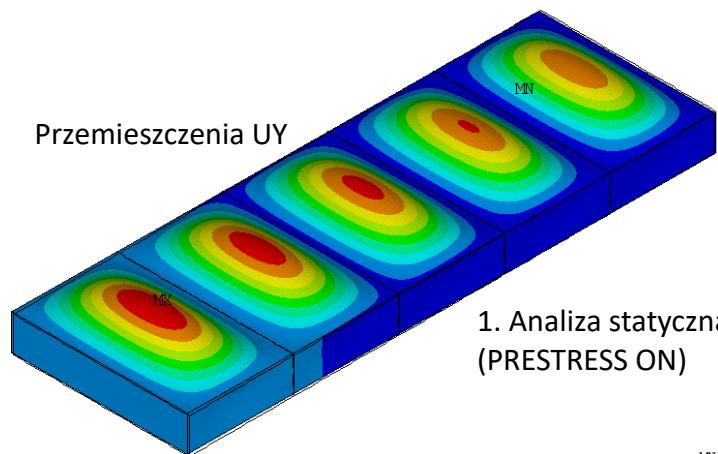
Obciążenie ciśnieniem
0.01MPa (100%)

TYPE NUM
0
PRES-NORM
-.01

```
/TITLE,Keson bez pasow
*SET,H,100 ! wysokość
*SET,B,500 ! szerokość
*SET,L,1500 ! długość
*SET,npas,4 ! liczba pasow
*SET,grub,0.5 ! grubość pokrycia
*SET,R_pas,5 ! promień pasa
*SET,grub_zebr,2 ! grubość zebra
*SET,E_SIZE,10 ! rozmiar elementów
*SET,F_SILA,1000 ! siła pionowa
*SET,pressure,0.01
*SET,EE,7e5
*SET,NI,.32
```

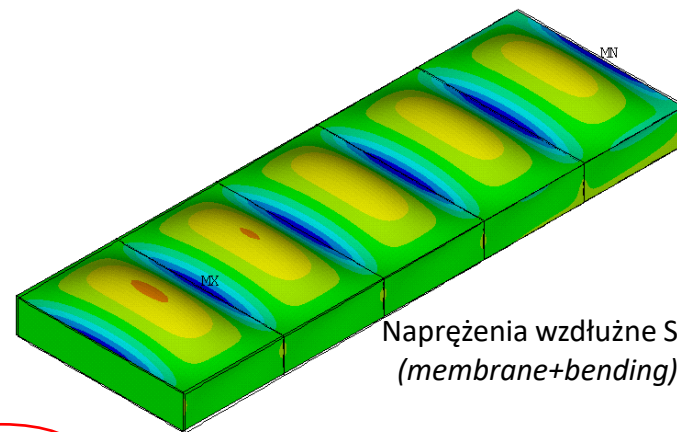


Przemieszczenia UY



1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

```
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =27.7487
SMN =-.499023
SMX =27.7483
-.499023
2.63957
5.77816
8.91675
12.0553
15.1939
18.3325
21.4711
24.6097
27.7483
```



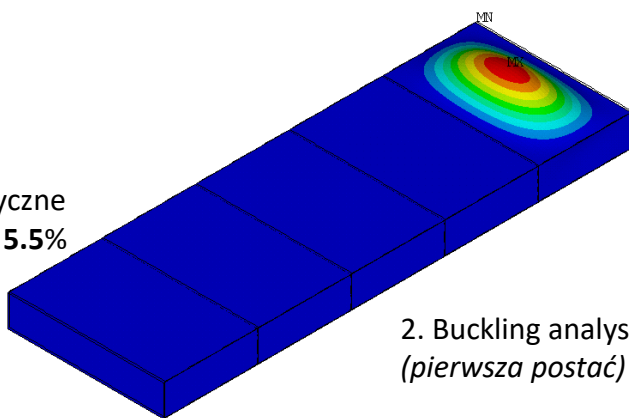
Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane+bending)

```
TIME=1
SZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =27.7487
SMN =-1734.4
SMX =1559.35
-1734.4
-1368.43
-1002.46
-636.484
-270.511
95.462
461.435
827.409
1193.38
1559.35
```



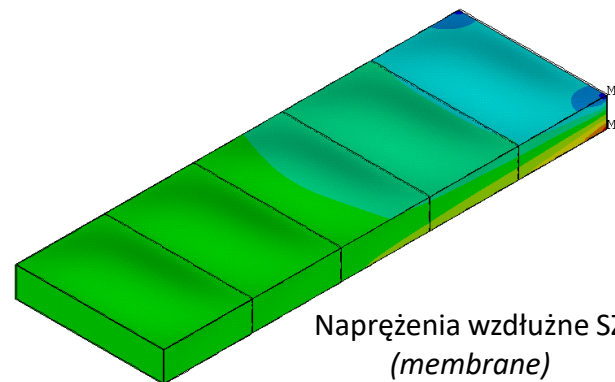
Keson bez pasow

Obciążenie krytyczne
.05534*.01 MPa → 5.5%



2. Buckling analysis
(pierwsza postać)

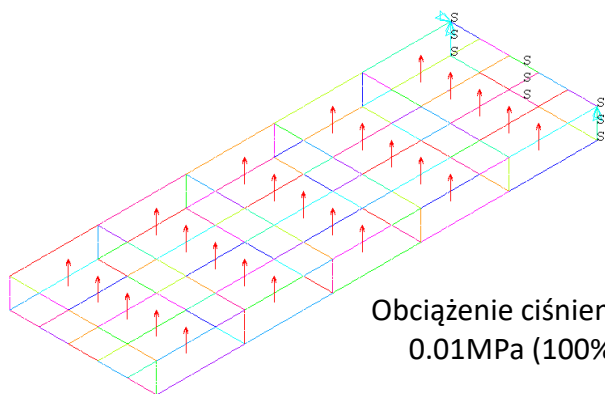
```
FACT=.055339
USIM (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.057036
SMX =.057036
0
.006337
.012675
.019012
.025349
.031686
.038024
.044361
.050698
.057036
```



Naprężenia wzdłużne SZ
(membrane)

```
TIME=1
SZ (AVG)
MIDDLE
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =27.7487
SMN =-383.437
SMX =366.098
-383.437
-300.155
-216.874
-133.592
-50.3104
32.9713
116.253
199.535
282.816
366.098
```

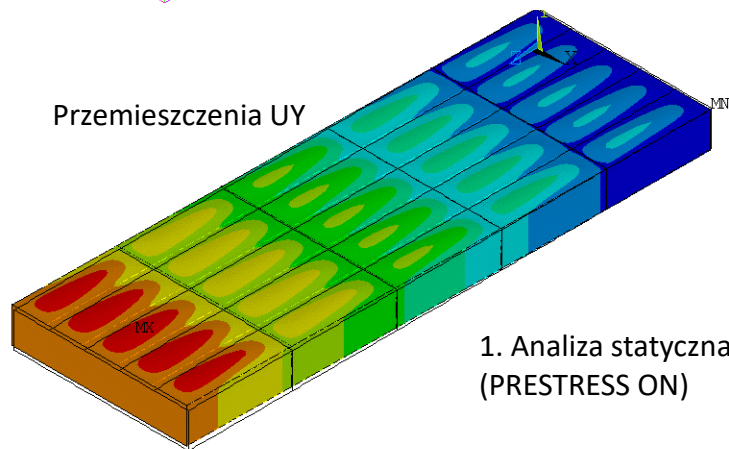
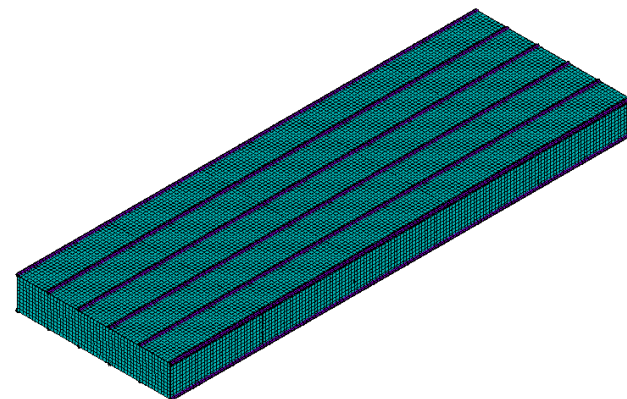
Przykład 8b Keson zginany z pasami: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, v=0.33



Obciążenie ciśnieniem
0.01MPa (100%)

```

TYPE NUM /TITLE,Keson z pasami
0 *SET,H,100 ! wysokość
PRES-NORM *SET,B,500 ! szerokość
-.01 *SET,L,1500 ! długość
*SET,npas,4 ! liczba pasów
*SET,grub,0.5 ! grubość pokrycia
*SET,R_pas,5 ! promień pasa
*SET,grub_zabr,2 ! grubość zebra
*SET,E_SIZE,10 ! rozmiar elementów
*SET,F_SILA,1000 ! siła pionowa
*SET,pressure,0.01
*SET,EE,7e5
*SET,NI,.32
    
```

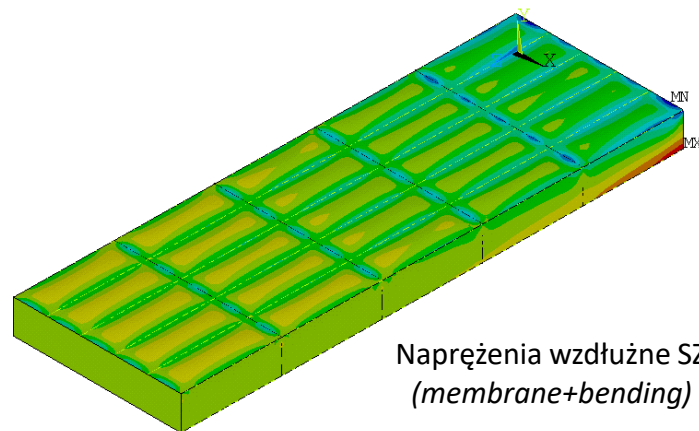


Przemieszczenia UY

1. Analiza statyczna
(PRESTRESS ON)

```

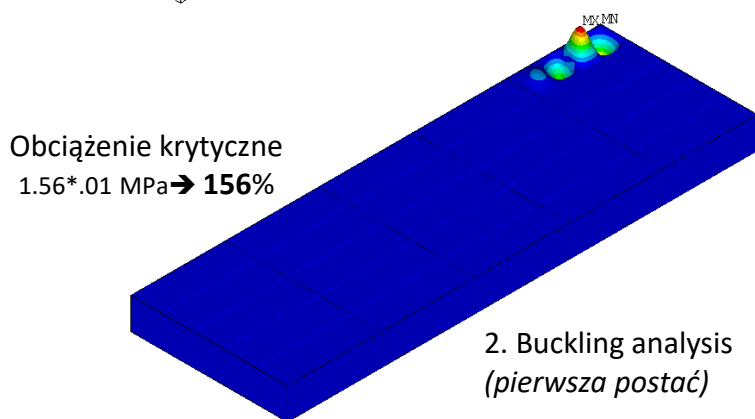
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =1.95444
SMX =1.95374
0
.217082
.434164
.651247
.868329
1.08541
1.30249
1.51958
1.73666
1.95374
    
```



Naprężenia wzdluzne SZ
(membrane+bending)

```

TIME=1
SZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =1.95444
SMN =-188.84
SMX =120.946
-188.84
-154.419
-119.998
-85.5776
-51.1569
-16.7363
17.6844
52.1051
86.5258
120.946
    
```

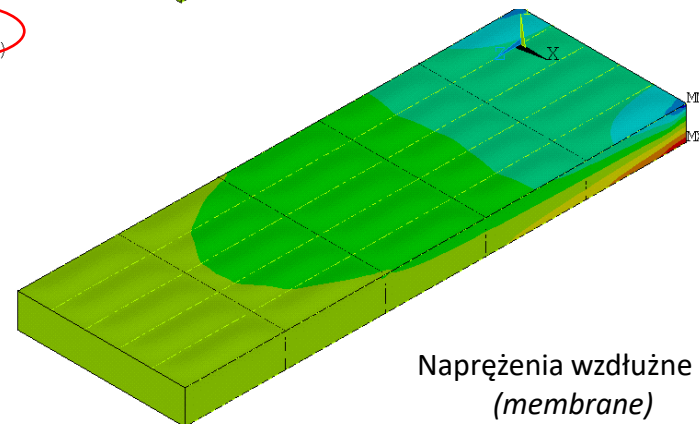


Obciążenie krytyczne
1.56*.01 MPa → 156%

2. Buckling analysis
(pierwsza postać)

```

FACT=1.56027
USCM (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.063554
SMX =.063554
0
.007062
.014123
.021185
.028246
.035308
.042369
.049431
.056492
.063554
    
```



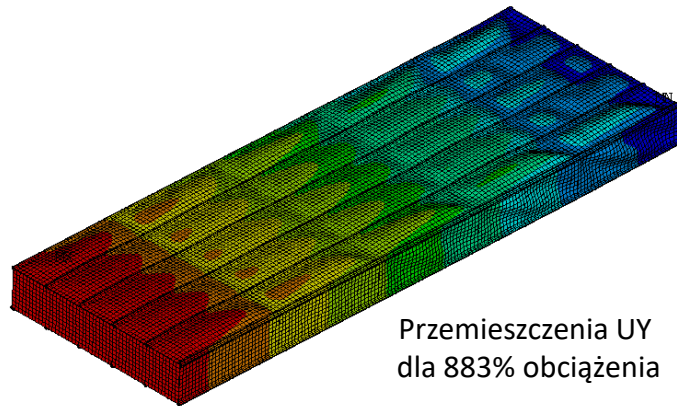
Naprężenia wzdluzne SZ
(membrane)

```

TIME=1
SZ (AVG)
MIDDLE
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =1.95444
SMN =-160.103
SMX =117.103
-160.103
-129.302
-98.5015
-67.7008
-36.9002
-6.0995
24.7012
55.5018
86.3025
117.103
    
```

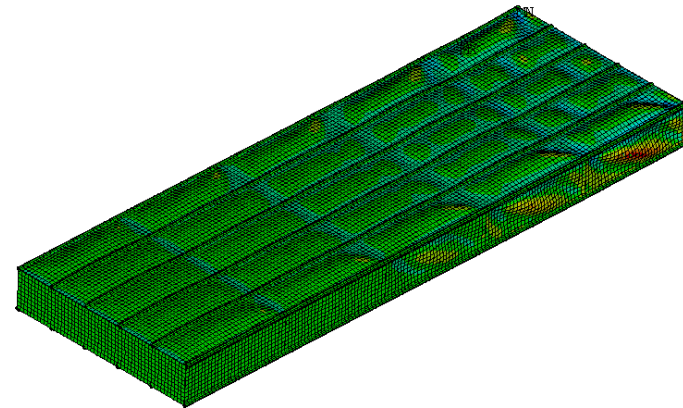
Przykład 8c Keson zginany z pasami NL geom: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, v=0.33

Obliczenia nieliniowe geometrycznie



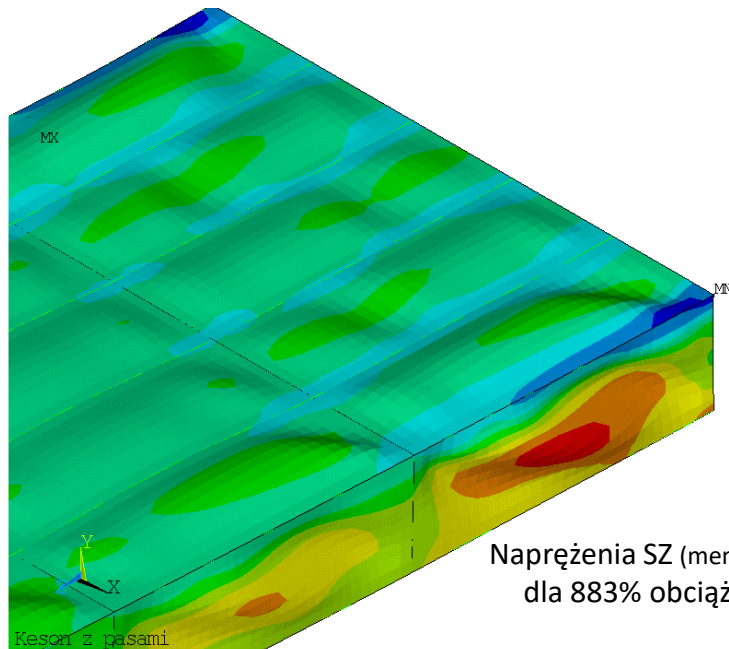
Przemieszczenia UY
dla 883% obciążenia

SUB = 24
TIME=8.82967
TY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =17.8089
SMN =-1.11824
SMX =17.7943
-1.11824
.983156
3.08455
5.18594
7.28734
9.38873
11.4901
13.5915
15.6929
17.7943



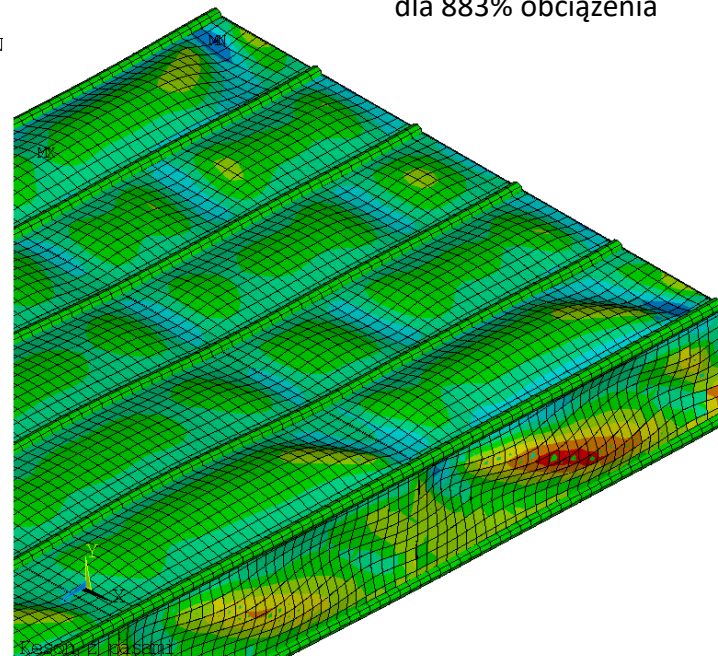
Napężenia SZ (membrane + bending)
dla 883% obciążenia

TIME=8.82967
SZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =17.8089
SMN =-2614.04
SMX =2879.67
-2614.04
-2003.63
-1393.22
-782.805
-172.392
438.021
1048.43
1658.85
2269.26
2879.67



Napężenia SZ (membrane)
dla 883% obciążenia

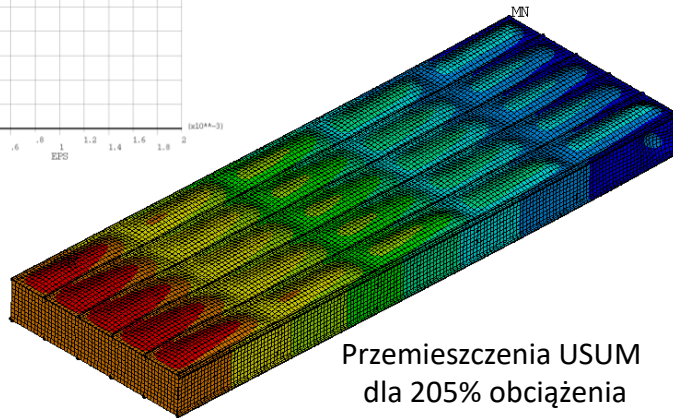
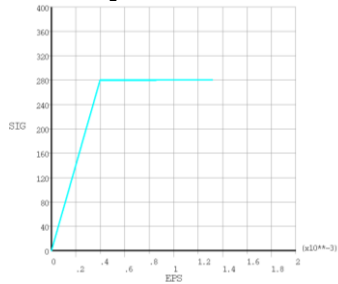
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB = 24
TIME=8.82967
SZ (AVG)
MIDDLE
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =17.8088
SMN =-1372.68
SMX =1352.9
-1372.68
-1069.83
-766.993
-464.152
-161.31
141.531
444.373
747.214
1050.06
1352.9



18:23:21
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB = 24
TIME=8.82967
SZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =17.8089
SMN =-2614.04
SMX =2879.67
-2614.04
-2003.63
-1393.22
-782.805
-172.392
438.021
1048.43
1658.85
2269.26
2879.67

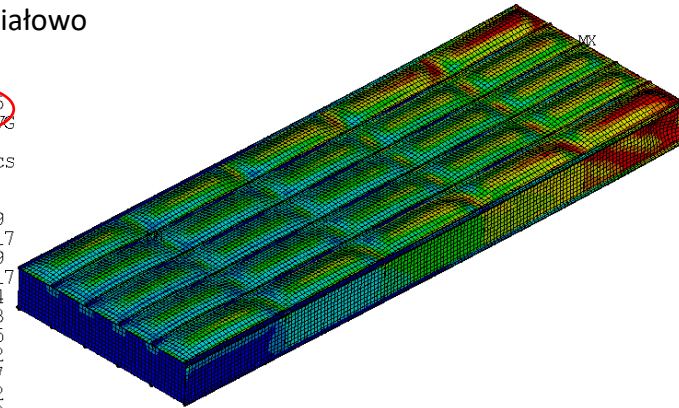
Przykład 8d Keson zginany z pasami PLNL geom: $E=7e4$ MPa, $\nu=0.33$, $R_{0.2}=280$ MPa, $E_u=500$ MPa

Obliczenia nieliniowe geometrycznie i materiałowo



Przemieszczenia USUM dla 205% obciążenia

TIME=2.05425
USUM (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =4.03879
SMN =.154E-17
SMX =4.03879
.154E-17
.448754
.897508
1.34626
1.79502
2.24377
2.69252
3.14128
3.59003
4.03879

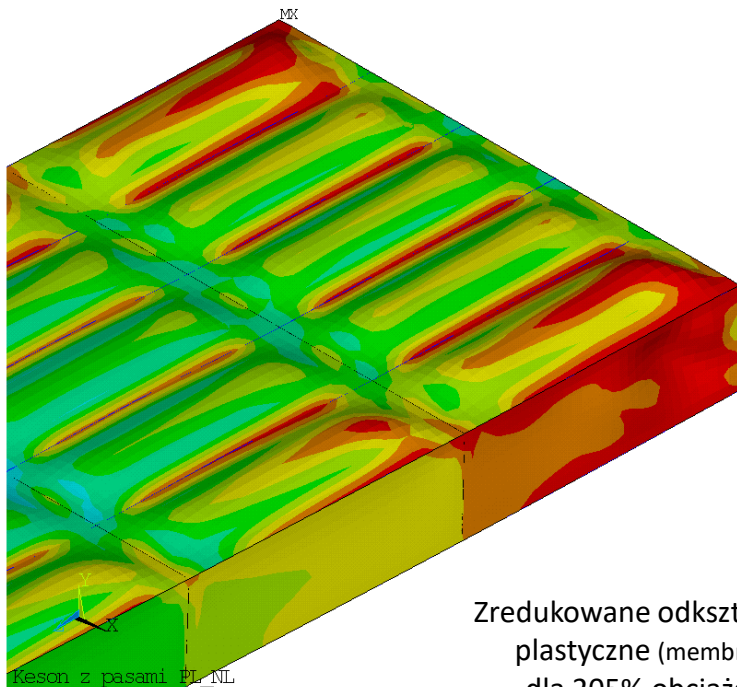


Zredukowane odkształcenia plastyczne (membrane + bending) dla 205% obciążenia

TIME=2.05425
EPELQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =4.03879
SMN =.315E-07
SMX =.410E-03
.315E-07
.456E-04
.912E-04
.137E-03
.182E-03
.228E-03
.274E-03
.319E-03
.365E-03
.410E-03

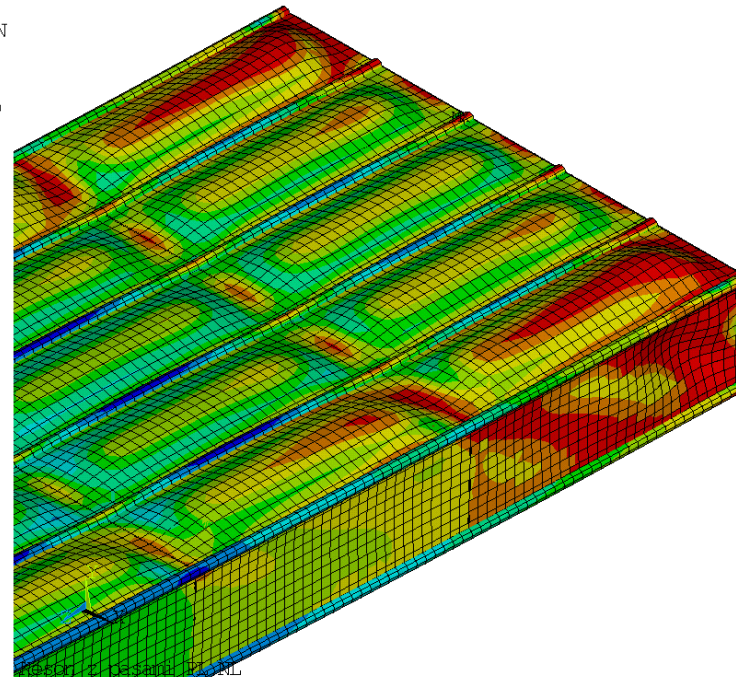


son z pasami PL_NL



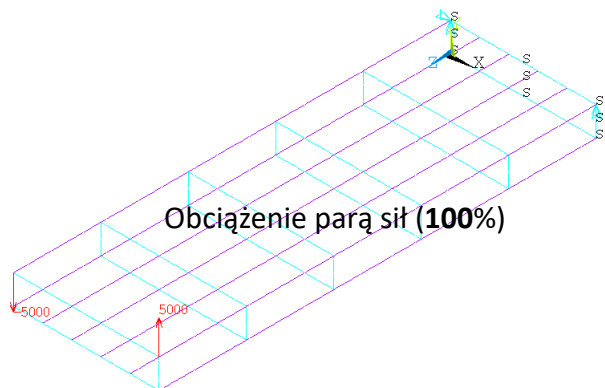
Zredukowane odkształcenia plastyczne (membrane) dla 205% obciążenia

NOV 16 2024
18:34:17
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB=5
TIME=2.05425
EPELQV (AVG)
MIDDLE
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =4.03877
SMN =.333E-05
SMX =.403E-03
.333E-05
.477E-04
.922E-04
.137E-03
.181E-03
.225E-03
.270E-03
.314E-03
.359E-03
.403E-03

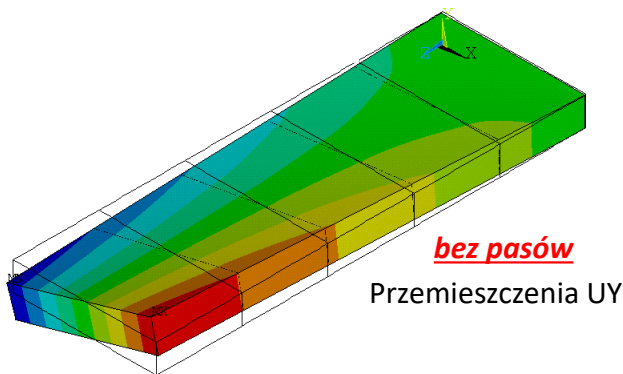


NOV 16 2024
18:33:53
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB=5
TIME=2.05425
EPELQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =4.03879
SMN =.315E-07
SMX =.410E-03
.315E-07
.456E-04
.912E-04
.137E-03
.182E-03
.228E-03
.274E-03
.319E-03
.365E-03
.410E-03

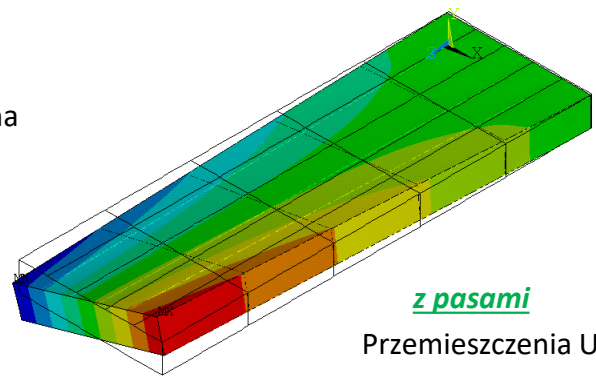
Przykład 8a Keson skręcany: L=1500mm, B=300, H=100, G=0.5, E=7e4 MPa, v=0.33



1. Analiza statyczna (PRESTRESS ON)



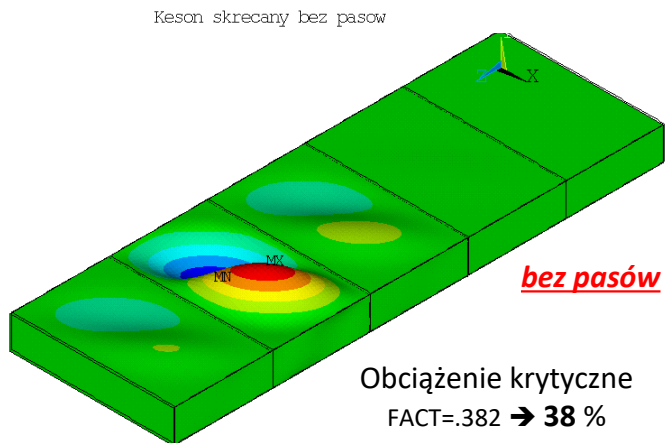
SUB =1
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.887335
SMN =-.868689
SMX =.868818
-.868689
-.675632
-.482576
-.28952
-.096463
.096593
.289649
.482706
.675762
.868818



STEP=1
SUB =1
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.836212
SMN =-.819756
SMX =.819798
-.819756
-.637584
-.455411
-.273238
-.091066
.091107
.27328
.455453
.637625
.819798

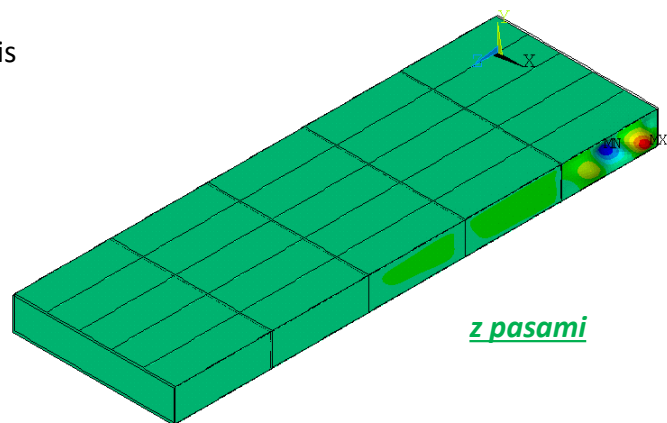
Keson skręcany z pasami

2. Buckling analysis (pierwsza postać)



FACT=.382847
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.057287
SMN =-.051884
SMX =.057287
-.051884
-.039754
-.027623
-.015493
-.003363
.008767
.020897
.033027
.045157
.057287

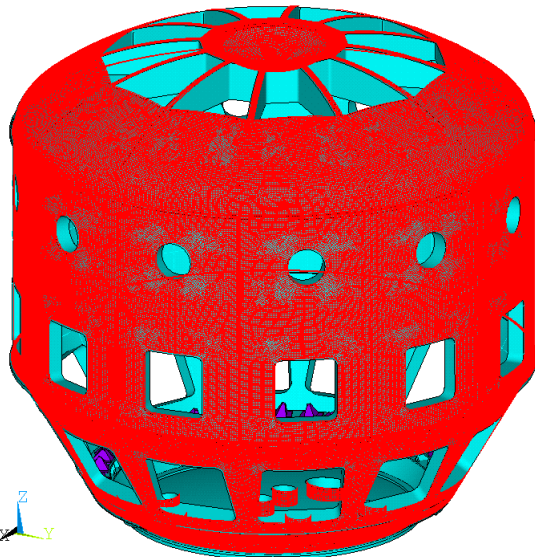
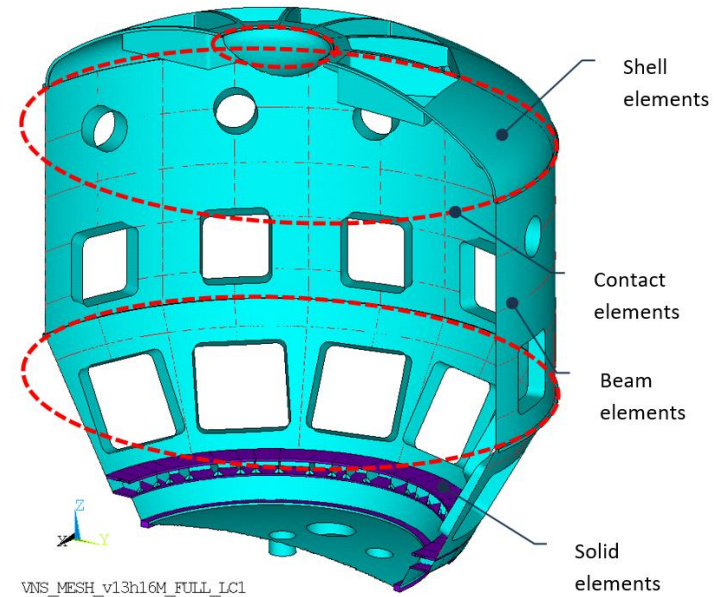
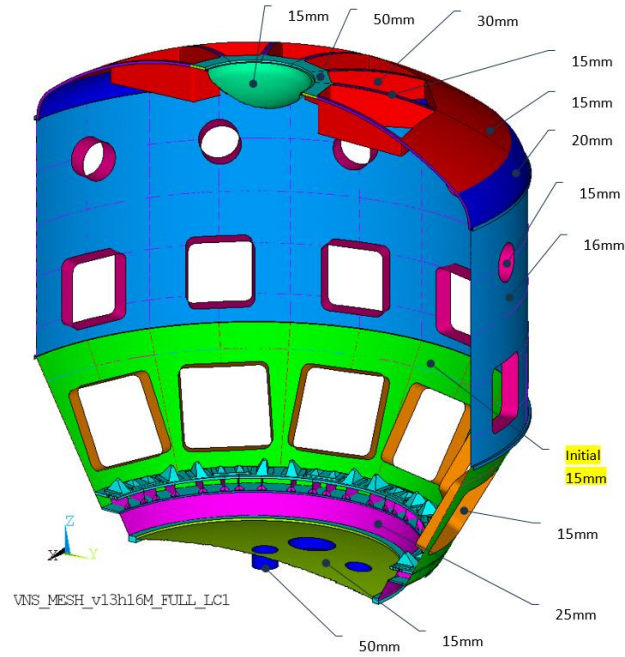
Obciążenie krytyczne
FACT=.382 → 38 %



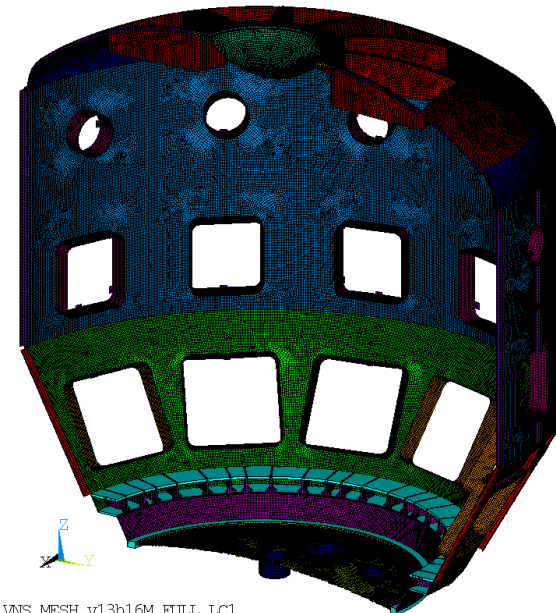
SUB =1
FACT=2.3107
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.067742
SMN =-.054176
SMX =.067742
-.054176
-.040629
-.027083
-.013536
.100E-04
.013557
.027103
.040649
.054196
.067742

Obciążenie krytyczne
FACT=2.3107 → 231 %

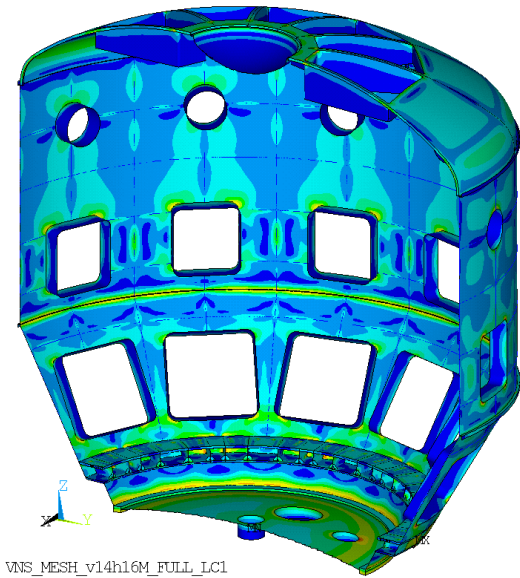
Structural analysis of the cryostat (VNS Feasibility study 2024)



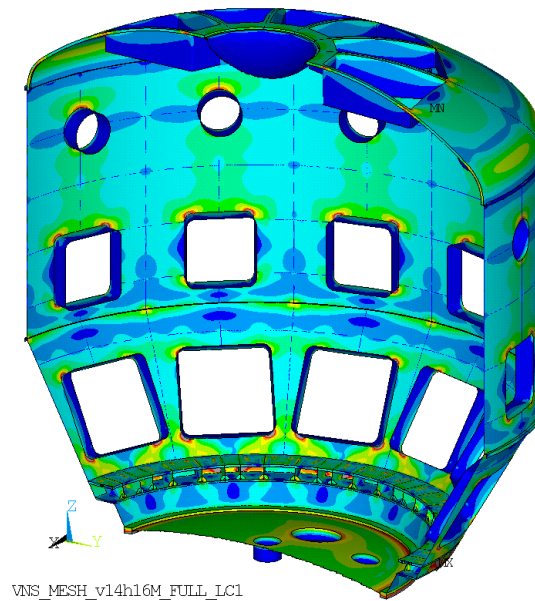
NOV 2 2024
09:26:50
PLOT NO. 1
ELEMENTS
PowerGraphics
EFACET=1
MAT NUM
PRES-NORM
.1



Load case 1: Normal operation (P + D)



ANSYS 2024 R2
Build 24.2
NOV 2 2024
16:18:12
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =19.7279
SMN =-.087978
SMX =280.753
0
19.1111
38.2222
57.3333
76.4444
95.5556
114.667
133.778
152.889
172



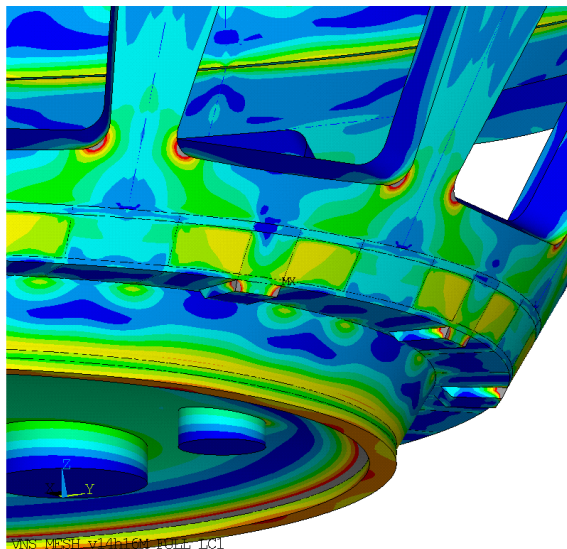
ANSYS 2024 R2
Build 24.2
NOV 2 2024
16:18:16
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
MIDDLE
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =19.7279
SMN =-.052089
SMX =280.753
0
12.7778
25.5556
38.3333
51.1111
63.8889
76.6667
89.4444
102.222
115

Von Mises stress (Pm+Pb) [MPa]

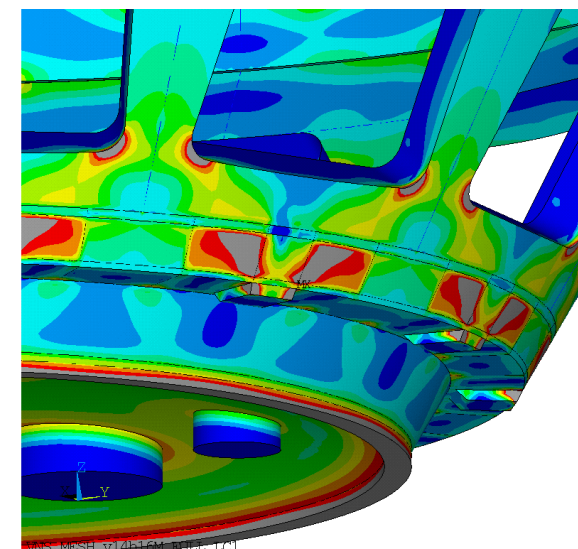
Load case 1: Normal operation (P + D)

Von Mises membrane stress (Pm) [MPa]

Load case 1: Normal operation (P + D)

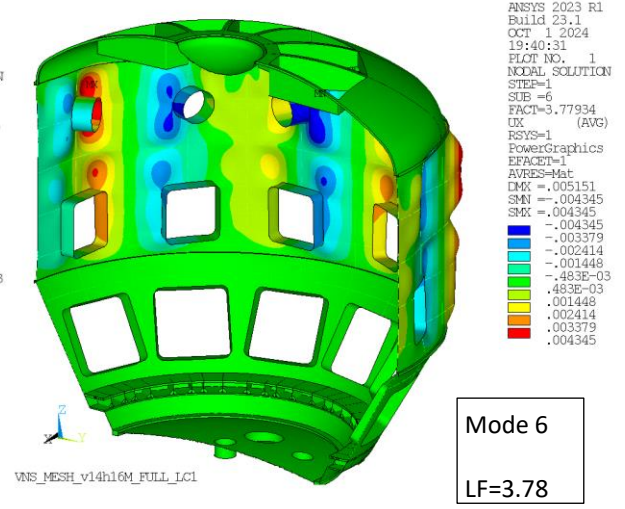
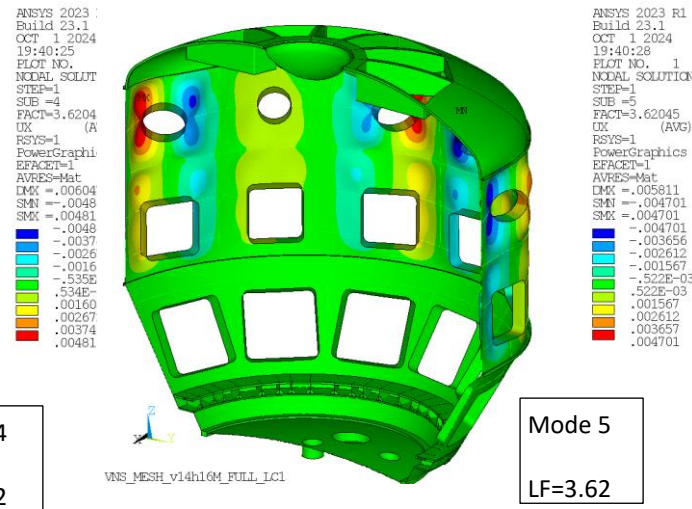
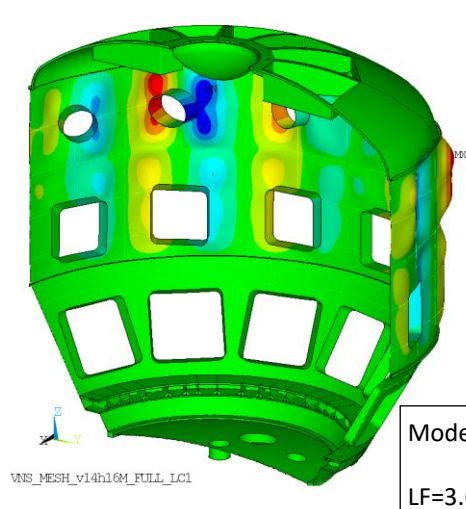
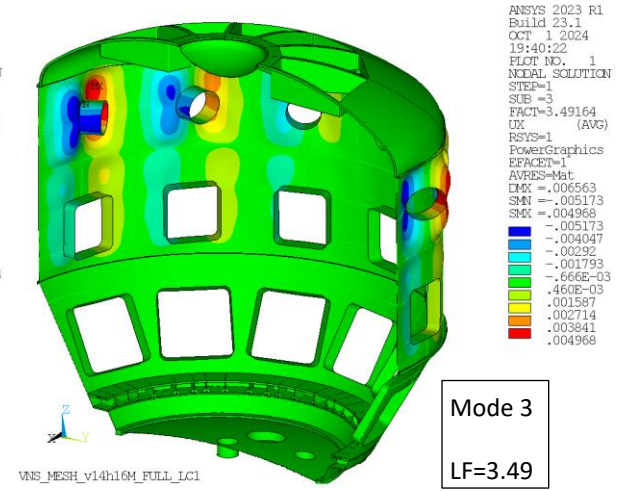
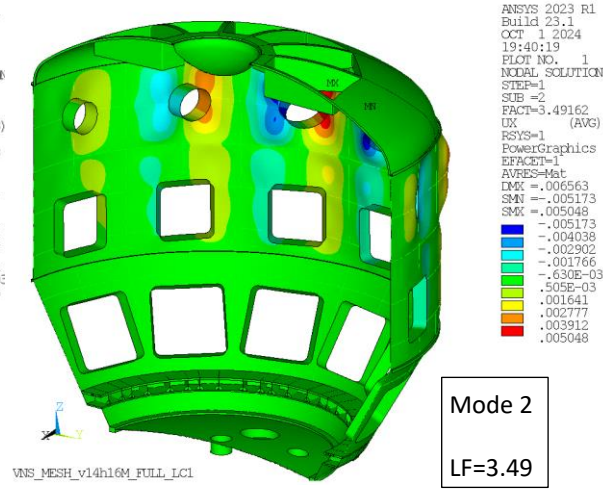
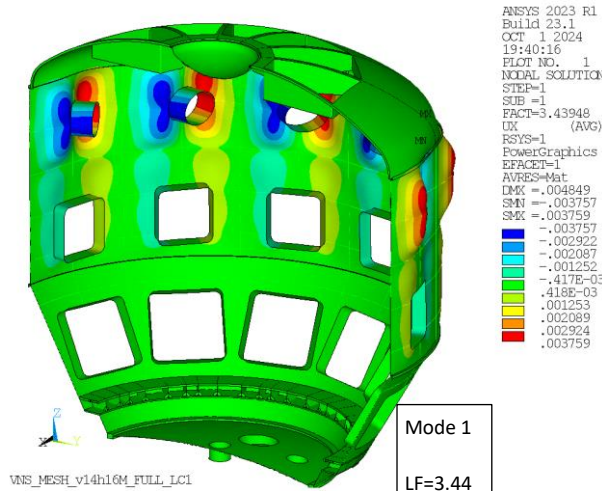


Build 24.2
NOV 2 2024
16:29:25
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =19.7279
SMN =-.087978
SMX =281.608
0
19.1111
38.2222
57.3333
76.4444
95.5556
114.667
133.778
152.889
172



Build 24.2
NOV 2 2024
16:31:05
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
MIDDLE
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =19.7279
SMN =-.052075
SMX =281.608
0
12.7778
25.5556
38.3333
51.1111
63.8889
76.6667
89.4444
102.222
115

Buckling modes 1-6 for Load case 1: Normal operation (P + D)



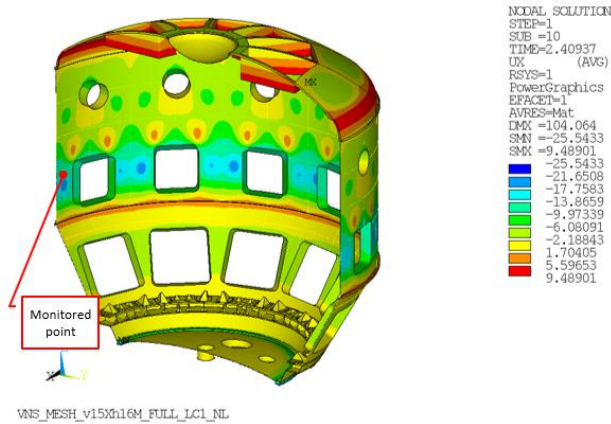


Figure 5-9 Radial displacements [mm] for LF=2.41- Final model: Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)

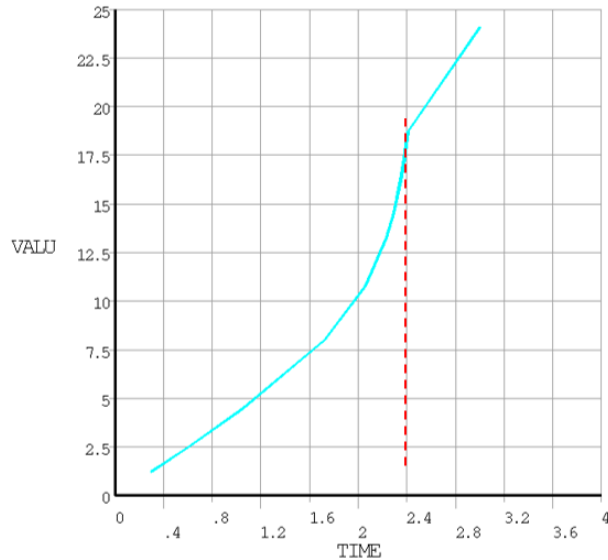
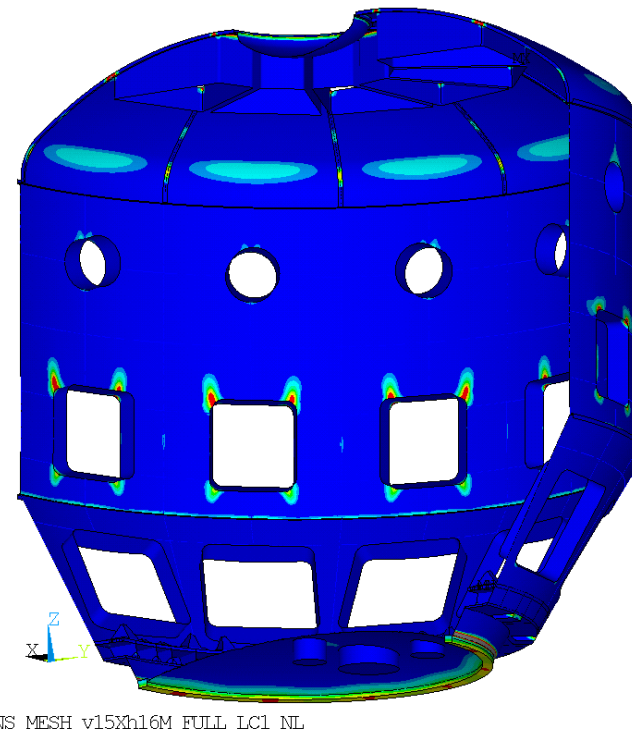
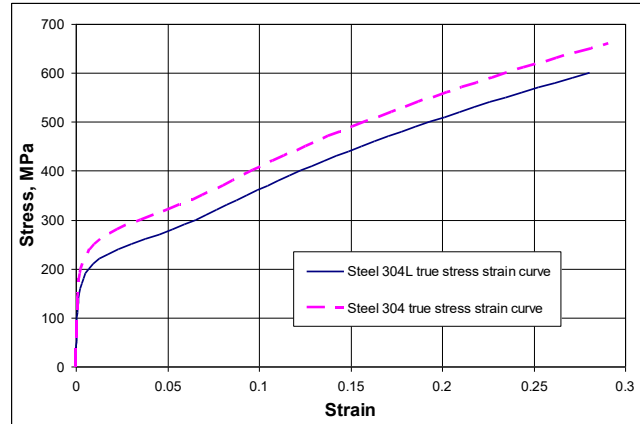


Figure 5-11 Radial displacement of the monitored point as a functions of the Load Factor
- Final model - Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)



ANSYS 2024 R2
Build 24.2
NOV 4 2024
15:05:15
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =10
TIME=2.40937
NLEPEQ (AVG)
RSYS=1
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =104.064
SMX =.026452

Accumulated Equivalent plastic strain for LF=2.41- Final model:
Elastic – Plastic Analysis 2.4 (P + D)